ESTUDIO DE CIERTOS CASOS DE ONDAS

Por
RECLUS ROCA VILA
y
C. M. BRIEF MARQUEZ,

egresados de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes, actualmente Profesores de la Universidad Central de Venezuela.

A. - INTRODUCCION

La propagación de las ondas en los medios físicos elásticos de una dimensión, tales como las cuerdas, las columnas de gas y otros fluidos compresibles, está gobernada, como se verá más adelante (pág. 44) por la ecuación diferencial

$$\partial^2 y/\partial x^2 = 1/c^2 \ \partial^2 y/\partial t^2 \qquad \text{(A-1)}.$$

El estudio de los fenómenos físicos mencionados se hará integrando esta ecuación y determinando las funciones solución por las distintas *condiciones de entorno* que se presenten.

Se presenta la cuestión de considerar la forma misma de las funciones solución y estudiar los paralelismos que se pueden establecer entre ellas.

Esto conduce a la noción de desarrollo en series de Fourier y también a la noción más general de desarrollos de funciones en series convergentes por otras funciones ortonormales.

Después del estudio de todas estas propiedades generales se pasarán en revista algunos casos físicos de ondas y vibraciones.

La ecuación (A-1) como se sabe tiene por solución funcional general, según el método de d'Alembert:

$$y = f(x - ct) + g(x + ct) \qquad \text{(A-2)}$$

en la que f y g son dos funciones arbitrarias y derivables dos veces al menos.

Por otra parte, también se puede buscar una familia de soluciones particulares del tipo

$$y = X(x).T(t) \qquad \text{(A-3)}$$

que aunque no son generales presentan interés especial.

En este caso, substituyendo la solución $y = X.T$ en la ecuación (A-1) se obtiene después de agrupar los términos

$$\frac{1}{X}\,\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{1}{c^2T}.\frac{d^2T}{dt^2}$$

Siendo el primer miembro de esta ecuación, independiente de *t* y el segundo miembro, independiente de *x*, y siendo los dos miembros iguales, sólo cabe que sean ambos constantes, luego

$$\frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{c^2T}\,.\,\frac{d^2T}{dt^2} = -p^2$$

en que p es una constante.

(No se pierde generalidad con el signo negativo).

Estas igualdades dan origen a las ecuaciones diferenciales

$$X'' + p^2X = 0$$

$$T'' + c^2p^2T = 0$$

cuya solución general es, para cada una:

$$X = A \cos px + B \operatorname{sen} px$$
$$T = C \cos pct + D \operatorname{sen} pct \qquad \text{(A-3 bis.)}$$

La función y buscada sería pues de la forma:

$$y = X.T = a \cos px.\cos pct + b \cos px.\operatorname{sen} pct + c \operatorname{sen} px.\operatorname{sen} pct \qquad \text{(A-4)}$$

es decir, una suma de productos de senos y cosenos.

De la misma manera, siendo A-1 lineal, una suma de soluciones del tipo de (A-4) serían también solución.

Considerando ahora que (A-2) y (A-3) son soluciones de la misma ecuación diferencial se presenta el problema de saber qué correspondencia puede existir entre ambas formas de solución, es decir, entre una función f(x) en particular, periódica, y la suma finita o infinita de senos y cosenos de argumento x.

B. - SERIES DE FOURIER

Dada una función *periódica* f(x) y considerando una serie de funciones trigonométricas de mismo período basico se presentan dos problemas fundamentales:

1.- ¿Qué funciones son representables por series trigonométricas de este tipo?
2.- ¿Cómo se puede obtener la representación en series de una función representable dada?

I.- FORMULAS DE EULER.-

Estudiemos el segundo de los problemas y supongamos que la función considerada f(x) es representable por una suma infinita de la forma

$$f(x) = \tfrac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\ x + b_n \operatorname{sen} nx) \qquad \text{(B-1)}$$
$$n \neq o$$

Como cos nx y sen nx son periódicas, de período 2π, también lo será $f(x)$. Basta estudiarla en un intervalo de 2π, por ejemplo $0 \leq x \leq 2\pi$.

Se puede demostrar que $f(x)$ no necesita ser continua en este intervalo, si los puntos de discontinuidad son en número finito. (Cond. suficiente).

Para calcular los coeficientes a_n y b_n partamos de las siguientes identidades

$$\cos px . \cos qx = \tfrac{1}{2} [\cos (p+q)x + \cos (p-q)x]$$

$$\operatorname{sen} px . \cos qx = \tfrac{1}{2} [\operatorname{sen} (p+q)x + \operatorname{sen} (p-q)x]$$

$$\operatorname{sen} px . \operatorname{sen} qx = \tfrac{1}{2} [\cos (p+q)x - \cos (p+q)x]$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cos 2x ; \text{ y } \quad \operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 2x$$

teniendo esto presente vemos que

$$\int_0^{2\pi} \cos px . \cos qx \, dx = \begin{Bmatrix} o \text{ si } p \neq q \\ \pi \text{ si } p = q > o \\ 2\pi \text{ si } p = q = o \end{Bmatrix} \qquad \text{(B-2)}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos px \operatorname{sen} qx \, dx = o \qquad \text{(B-3)}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} px \operatorname{sen} qx \, dx = \begin{Bmatrix} o \text{ si } p \neq q, \text{ó si } p = q = o \\ \pi \text{ si } p = q > o \end{Bmatrix} \qquad \text{(B-4)}$$

Consideremos ahora la relación (B-1) y multipliquemos sus miembros por *cos mx*, después de lo cual integremos todos los miembros entre $[0,2\pi]$.

Se obtiene entonces

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx = \tfrac{1}{2} a_o \int_{2\pi}^{o} \cos mx \, dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}(\alpha_n \cos nx \cos mx + b_n \operatorname{sen} nx \cos mx)\ dx$$

Admitiendo que las integraciones término por término han sido lícitas, tomando en cuenta las relaciones (B-2, 3, 4) se tendrá

$$\int_{0}^{2\pi} f(x) \cos mx\ dx = \begin{cases} \pi\alpha_o \text{ si } m=x \\ \pi\alpha_n \text{ si } m=n>o \end{cases}$$

De donde se saca para n distinto o igual a cero.

$$a_n = 1/\pi \int_{0}^{2\pi} f(x) \cos nx\ dx \qquad \text{(B-5)}$$

De la misma manera, multiplicando ambos miembros de B-1 por sen mx y después de suponer la convergencia, integrando en el intervalo $[0,2\pi]$ tendremos sucesivamente:

$$\int_{0}^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\ dx = \tfrac{1}{2}\alpha_o \int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen} mx\ dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}(\alpha_n \cos nx \operatorname{sen} mx + b_n \operatorname{sen} nx.\ \operatorname{sen} nx)dx$$

Tomando en cuenta las relaciones ($B_{2,3,4}$) se obtiene:

$$b_n = 1/\pi \int_{0}^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\ dx \qquad \text{(B-6)}$$

Las relaciones ($B_{5,6}$) son las fórmulas de Euler.

II.- APLICACION DE LAS FORMULAS DE EULER

Si la función f(x) es periódica de período $\alpha = 2l$, las ecuaciones de Euler tomarán la forma

$$a_n = 2/\alpha \int_0^{\alpha} f(x) \cos 2\pi x/\alpha \, dx; \quad b_n = 2/\alpha \int_0^{\alpha} f(x) \cos 2\pi x/\alpha \, dx$$

Funciones f(x) pares

Si $f(x) = f(-x)$, entonces $f(x)$ sen $nx \equiv -f(-x)$ sen $(-nx)$ y por consiguiente

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ sen } nx \, dx = 0 \qquad b_n = 0$$

Funciones f(x) impares.

Si $f(x) = -f(-x)$, entonces $f(x) \cos nx \equiv -f(-x) \cos(-nx)$ luego

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0 \qquad \alpha_n = 0$$

Término constante.

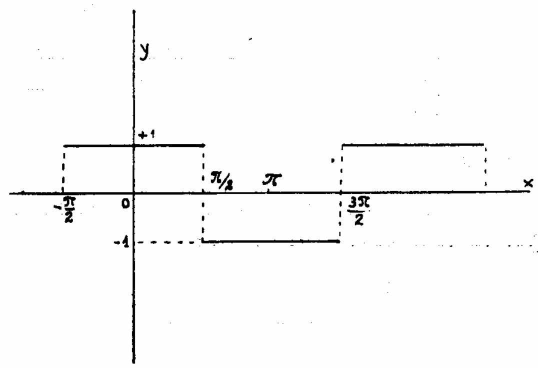
$$\alpha_0/2 = 1/2\pi \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$$

Será nulo si f(x) comprende áreas iguales por debajo y por encima del eje de las x.
Ejemplo: Sea la función definida como sigue

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ entre } \pi/2 \text{ y } 3\pi/2 \\ 1 \text{ entre } -\pi/2 \text{ y } \pi/2 \end{cases}$$

Como se ve la función es par y además las áreas de ambos lados de 0x, iguales. Luego

$$a_0 = 0 \qquad b_n = 0.$$



Busquemos las a_n

$$\alpha_n = 1/\pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(x) \cos nx \, dx = 1/\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (+1) \cos nx \, dx +$$

$$+ 1/\pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} (-1) \cos nx \, dx = 1/\pi \; [\text{sen } nx/n]_{-\pi/2}^{\pi/2} - [\text{sen } nx/n]_{\pi/2}^{3\pi/2} \; \therefore$$

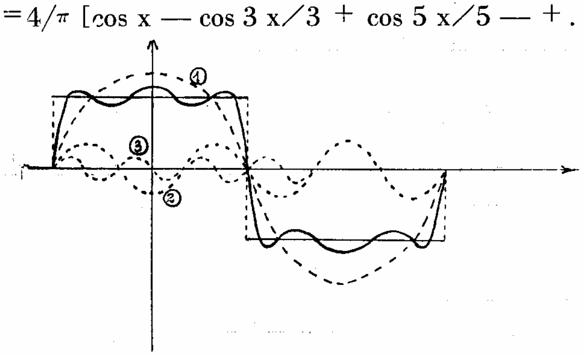
$$\alpha_n = 1/n\pi \; (3 \text{ sen } n\pi/2 - \text{sen } 3\pi n/2)$$

De aquí se saca $\quad a_0 = o \quad a_2 = a_4 = a_6 .... = o$

$$\alpha_1 = 4/\pi; \; \alpha_3 = -4/3\pi . . . .$$

Luego la función pedida tiene por desarrollo

$$f(x) = 4/\pi \; [\cos x - \cos 3 x/3 + \cos 5 x/5 - + ...]$$



III. - FUNCIONES ORTONORMALES.-

La posibilidad de representar funciones por una suma infinita de funciones, no se limita a que estas últimas sean trigonométricas, como vamos a ver.

Funciones ortogonales.-

Se dice que dos funciones son ortogonales en el intervalo si se cumple en el intervalo a b, que

$$\int_a^b f(x).\ g(x).\ dx = 0 \qquad \text{(B-7)}$$

Norma de una función.-. Se llama norma de una función f(x) a

$$N(f) = \int_a^b [f(x)]^2\ dx \qquad \text{(B-8)}$$

luego $N > 0$

Función normalizada se llama aquella función que cumple con $N(f) = 1$.

Dada una función, f(x), la función $\varphi(x) = f(x) / \sqrt{N(f)}$ está normalizada. En efecto

$$N(\varphi) = \int_a^b f^2(x) / N(f)\ dx = 1/N(f) \int_a^b f^2(x)\ dx = 1$$

Sistema ortonormal de funciones.-

Un sistema de $n+1$ funciones

$$\varphi_0(x)\ ;\ \varphi_1(x)\ ;\ \varphi_2(x) \ldots\ldots\ldots \varphi_n(x)$$

que son a la vez normales y ortogonales se llama sistema ortonormal y cumple con las condiciones

$$\int_a^b \varphi_m(x).\ \varphi_n(x)\ dx = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq n \\ 1 \text{ si } m = n \end{cases} \qquad \text{(B-9)}$$

Ejemplos de funciones ortonormales:

$1/\sqrt{2\pi} \quad \cos x/\sqrt{\pi} \qquad \operatorname{sen} x/\sqrt{\pi} \quad \cos 2x/\sqrt{\pi}$

Un sistema ortonormal de funciones es completo cuando es imposible agregar a este conjunto ninguno más que satisfaga estas condiciones.

Supongamos pues que una función f(x) puede ser desarrollada en una serie convergente de un conjunto completo de funciones ortonormales

$$f(x) = a_0 \varphi_0 + a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 \ \dots + a_n\varphi_n + \dots..$$

y busquemos como se obtendrían entonces los coeficientes a_k. Multipliquemos entonces ambos miembros por φ_k e integremos en el intervalo [a,b]

$$\int_a^b f(x)\, \varphi_k\, dx = a_0 \int_a^b \varphi_0\, \varphi_k\, dx + a_1 \int_a^b \varphi_1\, \varphi_k\, dx + \dots + \int_a^b a_k\, \varphi_k^2 dx + \dots$$

De las relaciones B-9 se deduce pues que

$$a_k = \int_a^b f(x)\, \varphi_k(x)\, dx \qquad \text{(B-10)}$$

Esta fórmula constituye una generalización de EULER.

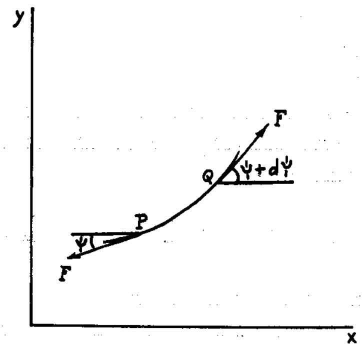
Ejemplo de funciones ortonormales:

Polinomios de LEGENDRE

C.- ONDAS EN LAS CUERDAS.

I.- ECUACION DIFERENCIAL.-

Supongamos la cuerda de longitud infinita y consideremos un elemento PQ de longitud ds. Aunque la cuerda se supone ligeramente extensible, se considera que las fuerzas en cada extremo son iguales, cosa que se puede hacer, como se verá, siempre que el perfil de ondas no presente cambios repentinos.



Sea P la masa por unidad de longitud.

Resultante paralela a 0y. F sen $(\Psi + d\Psi)$ — F sen$\Psi =$ $= F \cos \Psi \, d\Psi$

Aplicando la ley de Newton

$$F \cos \Psi \, d\Psi / ds = \rho \, \partial^2 y / \partial t^2$$

Por otra parte $\operatorname{tg}\Psi = \partial y / \partial x$ luego $d\Psi / \cos^2\Psi = \partial^2 y / \partial x^2 \, dx$ llevando el valor de $d\Psi$

$$\partial\Psi / \partial s = \cos^2\Psi . \, \partial^2 y / \partial x^2$$

de donde

$$\rho / F \, \partial^2 y / \partial t^2 = \cos^2\Psi . \, \partial^2 y / \partial x^2$$

Notemos que $\cos\Psi = (1 + \operatorname{tg}^2\Psi)^{-1/2} = [1 + (\partial y / \partial x)^2]^{-1/2}$

si despreciamos $\partial y / \partial x$ delante de 1.

Llamando además $\rho / F = 1/c^2$ se tiene

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \text{(C-1)}$$

II.- SOLUCION GENERAL.-

Como se sabe, la solución general de esta ecuación es de la forma:

$$y = f(x - ct) + g(x + ct) \qquad \text{(C-2)}$$

Las funciones f y g se pueden determinar si se conocen las condiciones iniciales.

$$y_{t=0} = \varphi(x); \; y'_{t=0} = \Psi(x)$$

Luego $f(x) + g(x) = \varphi(x)$. y $-cf'(x) + cg'(x) = \Psi(x)$; integrando la segunda ecuación se obtiene

$$-f(x) + g(x) = 1/c \int_{x_0}^{x} \Psi(x)\, dx.$$

$$f(x) + g(x) = \varphi(x).$$

de donde se despejan $f(x)$ y $g(x)$ y sale

$$y = \tfrac{1}{2} \left\{ \varphi(x - ct) + \varphi(x + ct) + 1/c \int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(x)\, dx \right\} \qquad \text{(C-3)}$$

Aplicación de la solución encontrada.

III.- ENERGIA QUE LLEVA LA ONDA.-

Energía cinética.

$$T = \tfrac{1}{2} \int \rho y^2\, dx \qquad \text{(C-4)}$$

Energía potencial. El trabajo realizado al alargarse la cuerda es $F(ds\text{-}dx)$ para el elemento PQ.

Luego la energía potencial

$$V=\int F(ds-dx)=\int F[\sqrt{1+(\partial y/\partial x)^2}-1]\,dx \;\therefore$$

$$V=\tfrac{1}{2}\int F(\partial y/\partial x)^2\,dx \qquad \text{(C-5)}$$

a) *Energía en una onda progresiva* $y=f(x-ct)$.

La energía cinética

$$T=\tfrac{1}{2}\int \rho y'^2\,dx=\tfrac{1}{2}F\int f'^2\,dx$$

Energía potencial

$$V=\tfrac{1}{2}F\int f'^2\,dx$$

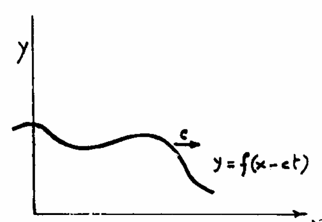
La energía cinética y potencial son pues iguales en una onda progresiva $f(x-ct)$ o $g(x+ct)$.

b) *Energía en una onda estacionaria* $y=f(x-ct)+g(x+ct)$.

$$V=\tfrac{1}{2}F\int (f'+g')^2\,dx$$
$$T=\tfrac{1}{2}\rho c\int (-f'+g')^2\,dx$$

Luego en una onda estacionaria las energías cinética y potencial no son iguales.

IV.- ONDAS ARMONICAS.-



Se sabe que una onda que se desplaza en el sentido positivo del eje de las x con una velocidad c tiene en general la forma

$$y=f(x-ct).$$

Estudiemos el caso en que $f(x-ct)$ es una función trigonométrica. Su estudio se justifica por haberse visto ya que estas funciones aparecen muy naturalmente en la solución de la ecuación de ondas, y también porque según los métodos de Fourier, una función periódica cualquiera podrá desarrollarse generalmente en una suma de funciones armónicas.

Tenemos pues este caso $y = a \cos m\,(x - ct)$.

Esta función toma el mismo valor en intervalos $2\pi/m = \lambda$ cuya longitud llamaremos longitud de onda λ. La ecuación tomará pues la forma

$$y = a \cos 2\pi/\lambda\,(x - ct) \qquad \text{(C-6)}$$

Llamemos ahora período el tiempo necesario para que la onda recorra una distancia igual $cT = \lambda$

Frecuencia será el número de períodos por segundos o sea $n = 1/T = c/\lambda$

Número de ondas lo llamaremos a la cantidad k de ondas que haya por unidad de longitud, o sea $k = 1/\lambda$

Con estas definiciones se tendrá

$$y = a \cos 2\pi\,(kx - nt), \text{ velocidad } c = n\lambda \qquad \text{(C-7)}$$

Consideremos una onda que está adelantada con respecto a la anterior de la distancia $\Sigma/2\pi k$, su ecuación será

$$y = a \cos [2\pi(kx - nt) + \Sigma] \qquad \text{(C-8)}$$

en que Σ será la fase de la onda C-8 con respecto a la onda C-7.

Simplificación y generalización de la ecuación.

Consideremos la función

$$y = a e^{-i\,[2\pi\,(kx - nt) + \Sigma]}$$

cuya parte real es precisamente la función armónica C-8.

Esta nueva función es también una solución de la ecuación diferencial de las ondas (C-1). Es también además una función armónica. Podemos pues considerarla a ella misma como onda, o también como antes a su parte real solamente. Se puede escribir de la siguiente forma:

$$y = a e^{-i[2\pi (kx - n t) + \Sigma]} = a e^{i 2\pi (nt - kx)} e^{-i\Sigma}$$

y llamando $A = a e^{-i\Sigma}$

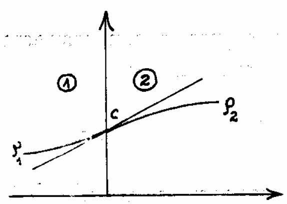
se tiene

$$y = A e^{i 2\pi (nt - kx)} \qquad \text{(C-9)}$$

donde A representa a la vez amplitud y la diferencia de fase.

$$\text{ampl.} = |A| \qquad \text{y fase} \quad - \text{Arg. } A.$$

V.- CUERDAS DE DISTINTAS DENSIDADES UNIDAS.-



Sean dos cuerdas semi-infinitas de densidades distintas, unidas en el origen y sean y_1 e y_2 sus desplazamientos finales. Supongamos que un tren de abscisas negativas. Cuando estas ondas ondas armónicas incide desde las encuentran el cambio de alambre sufren reflexión y transmisión parciales.

Se tendrá entonces

$$y_1 = y^{\text{incidente}} + y^{\text{reflejada}}; \quad y_2^{\text{transmitida}}.$$

donde

$$Y \text{ incidente} = A_1 e^{2\pi i (nt - k_1 x)}$$

$$Y\ \text{transmitida} = A_2 e^{\pi i\,(nt - k_2 x)} \qquad (C\text{-}10)$$

$$Y\ \text{reflejada} = B_1 e^{2\pi i\,(nt + k_4 x)}$$

La frecuencia de estas tres ondas debe ser la misma pero las longitudes de ondas $1/k_1$ y $1/k_2$ serán en general distintas.

Ya que $c_1 = n/k_1$ y $c_2 = n/k_2$; puesto que $c^2 = F/\rho$

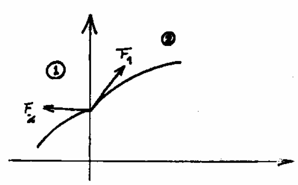
$$c^2_1/c^2_2 = \rho_2/\rho_1 \quad \therefore \quad k^2_2/k^2_1 = \rho_2/\rho_1$$

Determinación de A_2 y B_1 Tienen que cumplirse las *condiciones del contorno,* que aquí consiste del punto C.

En este punto

$$\left.\begin{cases} y_1 = y_2 \\ \partial y_1/\partial x = \partial y_2/\partial x \end{cases}\right\} \text{para cualquiera } t \qquad (C\text{-}11)$$

para asegurar la continuidad. En efecto, la condición $y_1 = y_2$ es evidente ya que la cuerda no debe romper. La segunda condición se ve, del hecho de que si $\partial y_1/\partial x_1 \neq \partial y_2/\partial y_2$, las tensiones de F_2 sobre la cuerda semi-infinita (2) y F_1 sobre la cuerda semi-infinita (1), tendrían una resultante no nula, finita, que actuando sobre la masa infinitésima del punto C produciría una aceleración infinita. Luego las condiciones C_{11} son bien las condiciones de contorno para este caso.



Las condiciones C-11 se tienen que cumplir para $x = o$ y cualquier t, luego

$$A_1 + B_1 = A_2$$

$$2\pi i\,(-k_1 A_1 + k_1 B_1) = 2\pi i\,(-k_2 A_2)$$

Cuyas soluciones son

$$B_1/A_1 = k_1 - k_2/k_1 + k_2, A_2/A_1 = 2k_1/k_1 + k_2 \quad (C\text{-}12)$$

k_1, k_2 y A_1 son reales. Luego también B_1 y A_2

A_2 es siempre positivo. Pero B_1 es positivo sólo si $k_1 > k_2$ o sea si $\rho_1 > \rho_2$.

Luego la onda transmitida está siempre en fase con la incidente pero la onda reflejada sólo está en fase si la densidad de la cuerda de la onda incidente es la mayor, sino, está en oposición de fase.

VI.- CUERDAS DE LONGITUD FINITA.-

Como se vió en la introducción las soluciones de tipo estacionario que verifica la ecuación diferencial

$$\partial^2 y/\partial x^2 = 1/c_2 \ \partial^2 y/\partial t^2$$

son del tipo

$$y = XT \text{ donde } \begin{cases} X = a_1 \text{ sen } px + b_1 \cos px. \\ T = a \cos cpt + b \text{ sen } cpt. \end{cases}$$

En efecto, estas soluciones se prestan más al cumplimiento de las condiciones del contorno, que son, para cualquier t, $y = o$ para $x = o$ y también $y = o$ para $x = l$ en que l es la longitud de la cuerda.

Para que se cumpla la primera de estas condiciones es necesario que $b_1 = o$, luego, haciendo $a_1 = 1$

$$y = \text{sen } px \ (a \cos cpt + b \text{ sen } cpt).$$

La condición $y = o$ para $x = l$ implica que $\text{sen } pl = o \therefore$ $pl = r\pi$ luego $p = r\pi/l$ y la solución es

$$y = \text{sen } r\pi x/l \ (a \cos r\pi ct/l + b \text{ sen } r\pi ct/l), \ r = 1,2,3 ... \text{(C-13)}$$

Esta solución en que r es arbitrario se llama un *modo normal* de vibración.

Solución general.- Será la suma de un número arbitrario de términos del tipo de (C-13).

$$y=\sum \text{sen } r\pi x/l \ (a_r \cos r\pi ct/l + b_r \text{ sen } r\pi ct/l) \qquad \text{(C-14)}$$

Las condiciones iniciales permitirán la determinación de las constantes a_r y b_r. En efecto, sean el perfil y la velocidad iniciales

$$\begin{aligned} y_{t=o} &= \varphi(x) \\ y'_{t=o} &= \Psi(x) \end{aligned} \qquad \text{(C-15)}$$

se tendrá además, en función de a_r y b_r

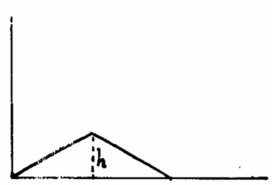
$$y_{t=o} = \sum_r a_r \text{ sen } r\pi x/l$$

$$y'_{t=o} = \sum_r b_r \, r\pi c/l \text{ sen } r\pi x/l$$

Las fórmulas (C-15) representan los desarrollos en series de Fourier de las funciones $\varphi(x)$ y $\Psi(x)$. Luego empleando las fórmulas de Euler:

$$a_r=2/l \int_o^l \varphi(x) \text{ sen } r\pi x/l \, dx$$

$$b_r=2/l\pi c \int_o^l \Psi(x) \text{ sen } r\pi x/l \, dx \qquad \text{(C-16)}$$



En particular si la cuerda está en reposo inicialmente, $t=o$, entonces $\Psi(x)\equiv o$ luego $b_r = o$.

Cuerda vibrante.-

Sea una cuerda de longitud l, abandonada a partir del reposo después de haber desviado su punto medio una distancia h. Según (C-15) podemos pues escribir

$$y=\sum_{r=1}^{\infty} a_r \text{ sen } r\pi x/l \cos r\pi c/l\, t \qquad \text{(C-17)}$$

Luego, para determinar los coeficientes a_r conocemos los desplazamientos en el instante t=o

$$f(x)=\begin{cases} 2hx/l & \text{para } 0\leq x\leq \tfrac{1}{2} \\ 2h(1\text{-}x) & \text{para } \tfrac{1}{2}\leq x\leq 1 \end{cases}$$

Los coeficientes a_r serán dados pues por

$$a_r=2/l \int_o^l \varphi(x) \text{ sen } r\pi x/l\, dx=$$

$$=2/l \int_o^l 2h/l\, x.\text{sen } r\pi x/l\, dx +2/l\int_o^l 2h/l\, (l-x)\text{sen } r\pi x/l\, dx$$

Tomando en cuenta que

$$\int x \text{ sen } r\pi x/l\, dx = -lx/r\pi \cos r\pi x/l + l^2/\pi^2 r^2 \text{ sen } r\pi x/l$$

se tiene

$$l^2/4h\, a_r=\Big[- lx/\pi r \cos r\pi x/l+ l^2/\pi^2 r^2 \text{ sen } r\pi x/l\Big]_o^{1/2} -$$

$$-\Big[\text{-}lx/\pi r \cos r\pi x/l +l^2/\pi^2 r^2 \text{ sen } r\pi x/l\Big]_{1/2}^{l} +l\Big[\text{-}l/r\pi \cos r\pi x/l\Big]_{1/2}^{l}$$

se presentan dos casos:

r par:

$$l^2 a_r/4h=-l/\pi r\, l/_2 \cos r\pi/_2-[l/\pi r\, l \cos r\pi-(\text{-}l/\pi r\, l/_2\cos r\pi/_2)]-$$
$$-l\, [l/r\pi \cos r\pi-l/r\pi \cos r\, \pi/2]=0$$

r impar:

$$l^2 a_r/4h = l^2/\pi^2 r^2 \operatorname{sen} r\pi/2 — [-l/\pi r\, l \cos r\pi —$$
$$—(l^2/\pi^2 r^2 \operatorname{sen} r\pi/2)] — l\,[l/r\pi \cos r\pi] = 2l^2/\pi^2 r^2 \operatorname{sen} r\pi/2 +$$
$$+ l^2/\pi r \cos r\pi — l^2/r\pi \cos r\pi$$

Luego en conclusión $a_r = 8h/\pi^2 r^2 \operatorname{sen} r\pi/2$ si r es impar

$a_r = o$ si r es par.

Tomando pues para r un valor siempre impar $r = 2n+1$, la ley del movimiento (C-17) se escribe

$$y = 8h/\pi^2 \sum_{n=o}^{\infty} 1/(2n+1)^2 \operatorname{sen}(2n+1)\pi/2.$$

$$.\operatorname{sen}(2n+1)\pi x/2 \cos(2n+1)\pi ct/2 \qquad \text{(C-18)}$$

$\varphi(x) =$

Como se ve, el valor de y es la superposición de ciertos modos normales con sus amplitudes correspondientes a_r.

Estas se llaman amplitudes parciales y en este caso, son nulas para r par, y varían como $1/r^2$ para r impar, por lo cual la amplitud de los modos superiores es relativamente pequeña.

Consideremos el modo normal de orden $r = 2n+1$.

$$y = \frac{8h}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{l} \cos \frac{(2n+1)\pi ct}{l} =$$

$$= \frac{8h}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r^2} \operatorname{sen} \frac{r\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{r\pi c}{l} \cos \frac{r\pi ct}{l}$$

Su frecuencia es $rc/2l$

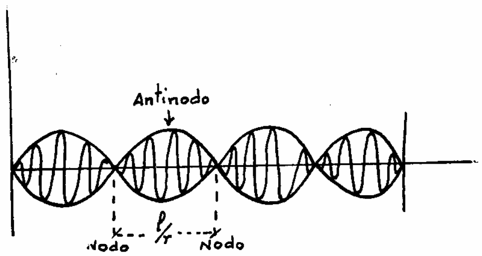
Nodos.- Puntos en que $y = o$ para cualquier t

$$\operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} = o \quad \therefore \quad \frac{r\pi x}{l} = \pi \quad \therefore \quad x = \frac{Kl}{r}$$

o sea para

$$x = o; \quad \frac{l}{r}; \quad \frac{2l}{r} \dots \quad \frac{(r-1)l}{r}$$

Se produce pues una alternancia de nodos y antinodos para cada modo normal.



La suma de todos los modos normales produce el movimiento real de la cuerda. Se ha visto sin embargo, que los modos de orden superior tienen amplitudes pequeñas.

Si se excita una cuerda en un punto cualquiera los modos que admiten a este punto como nodo serán los que entrarán en acción. Aquel de éstos que tenga r más pequeño, o sea el de mayor amplitud y menor número de nodos se llamará *fundamental* y los demás *armónicos.*

D.- ONDAS EN LOS LIQUIDOS

I.- TEOREMA DE GREEN-GAUSS.-

Sea una superficie S cerrada que limita un volumen V y sea una función f(xyz) cualquiera tal que f(xyz) y $\partial f/\partial x$ sean det·rminadas y continuas en la región V y sobre la superficie S.

Se verifica entonces que

$$\int_{(V)} \frac{\partial f}{\partial x} dV = \int_{(S)} f(x;y;z) \cos (\vec{n}; \vec{x}) \, d\sigma \qquad \text{(D-1)}$$

en que $d\sigma$ es el elemento de superficie de S, y n es la normal exterior n cada punto de la superficie.

Consecuencias.-

a) Si $f_1(xyz)$, $f_2(xyz)$, $f_3(x;y;z)$ son funciones definidas en V, entonces

$$\int_{(V)} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dV = \int_{(S)} [f_1 \cos(n,x) + f_2 \cos(n,y) + f_3 \cos(n,z)] \, dv \qquad \text{(D-2)}$$

b) Si f_1, f_2, f_3 son las proyecciones de un vector puro $\vec{a}$ y se tiene pues $a_x = f_1$, $a_y = f_2$, $a_z = f_3$, entonces se tendrá además

$$a_x \cos(u;x) + a_y \cos(u;y) + a_z \cos(u;z) = \mathcal{S}(\vec{a} \ \vec{n})$$

componente del vector a en la dirección de la normal. Luego según (D-2)

$$\int_{(V)} \operatorname{div} a \ dV = \int_{(S)} a_n \, dv \qquad \text{(D-3)}$$

c) Sean tres vectores $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ tres vectores y hagamos sucesivamente $f_1 = a_{1x}$, $f_2 = a_{2x}$, $f_3 = a_{3x}$ y después $f_1 = a_{1y}$, $f_2 = a_{2y}$, $f_3 = a_{3y}$; $f_1 = a_{1z}$, $f_2 = a_{2z}$, $f_3 = a_{3z}$

Aplicando a cada uno de estos grupos la relación (D-2) y sumando se obtiene

$$\int_{(V)} \left(\frac{\partial \vec{a}_1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{a}_2}{\partial y} + \frac{\partial \overleftrightarrows{a}_3}{\partial z} \right) dV = \int_{(S)} [\vec{a}_1 \cos(\vec{n} \ \overleftrightarrows{x}) + \vec{a}_2 \cos(\vec{n} \ \vec{y}) + \vec{a}_3 \cos(\vec{n} \ \vec{z})] \, dv \qquad \text{(D-4)}$$

II.- DERIVADA TOTAL.-

Si H (x, y. z, t) es una propiedad cualquiera de una partícula de flúido, tal como su velocidad, presión, densidad, entonces $\frac{\partial H}{\partial t}$ es la variación de H en un punto particular del espacio

y $\frac{dH}{dt}$ la variación de H, según un concepto debido a Lagrange,

cuando nos adherimos a la misma partícula del flúido.

Se tiene entonces

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} . \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} . \frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial z} . \frac{dz}{dz}$$

o sea $$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + v_x \frac{\partial H}{\partial x} + v_y \frac{\partial H}{\partial y} + v_z \frac{\partial H}{\partial z} \quad \text{(D-5)}$$

en que v (v_x, v_y, v_z) es la velocidad de la partícula.

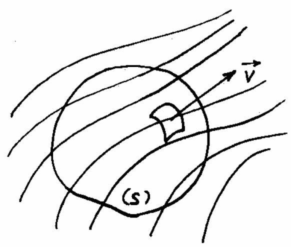
Se puede también escribir (D-5)

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \mathcal{S} (\vec{v}. \ \overrightarrow{\text{grad}} \ H)$$

o

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \mathcal{S} (v. \nabla) \ H$$

III.- ECUACION DE CONTINUIDAD.-



Sea una región llena de un flúido, en general compresible, que se mueve, creando un campo de velocidades en su seno.

Supóngase conocida la distribución de las densidades

$$\rho = \rho \ (x;y;z;t)$$

y sea S una superficie cerrada que limita un volumen V.

En un elemento de superficie $d\sigma$ de S pasa una masa de flúido $\rho v_n d\sigma$ y en toda la superficie

$$\int_{(S)} \rho v_n d\sigma$$

Si esta suma es nula, ello significa que la masa contenida en el interior de (s) no varía. Si no es nula, la masa habrá variado.

Consideremos pues la masa en el interior de S. Esta es

$$\int_{(V)} \rho dV$$

y su variación en el tiempo será

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho dV$$ Siendo V independiente

del tiempo la variación de la masa con el tiempo será

$$\int_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Si la densidad aumenta $\partial\rho/\partial t > o$ entonces la cantidad de masa que produjo este estado *ha penetrado* en el volumen limitado por S, luego

$$\int_{(S)} \rho v_n dS = - \int_{(V)} \frac{\partial t}{\partial \rho} dV$$

Aplicando ahora el teorema de Gauss D13 al vector $(\rho \vec{v})$ y pasando a un mismo miembro:

$$\int_{(V)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right] dV = 0$$

Para que esto se cumpla para cualquier volumen se puede demostrar que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \qquad \text{(D-6)}$$

Es la llamada ECUACION DE CONTINUIDAD.

Forma definitiva de la *ecuación de continuidad.*

Desarrollando (D-6):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) =$$

$$= 0$$

y se obtiene

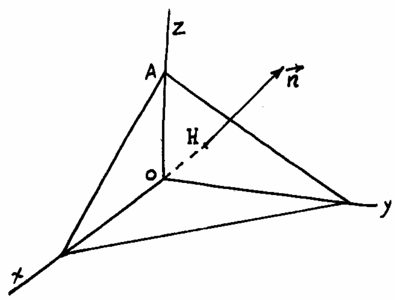
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \qquad \text{(D-7)}$$

Para un líquido incompresible: ρ no depende de t, ni de xyz. Luego

$$\operatorname{div.} v = 0 \qquad \text{(D-8)}$$

IV.- ECUACIONES DE EULER para un flúido perfecto.

a) *Esfuerzos alrededor de un punto.-*



Sea un elemento de volumen de un cuerpo y considerando los cuatro planos que lo limitan: los coordenados y el A B C. que forma un triángulo de área S, y normal n. Sea h = OH. perpendicular de 0 al plano ABC. La masa del elemento será m = 1/3 ρhS. Escribiendo para este elemento la ley de Newton, después de llamar $\vec{T}_n$ el esfuerzo unitario en la cara de normal $\vec{n}$, $\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$, $\vec{T}_z$ los esfuerzos unitarios en las caras de normales $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ respectivamente.

$$\frac{\varphi h}{3} S \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\varphi} \frac{\rho}{s} hS + \vec{T}_n . S - \vec{T}_x S \cos(\vec{n}\ \vec{x}) -$$

$$- \vec{T}_y S \cos(\vec{n}\ \vec{y}) - \vec{T}_z S \cos(\vec{n}\ \vec{z})$$

Simplificando por S y haciendo tender h→o se obtiene la ley de distribución de los esfuerzos alrededor del punto 0.

$$\vec{T}_n = \vec{T}_x \cos(\vec{n}\ \vec{x}) + T_y \cos(\vec{n}\ \vec{y}) + \vec{T}_z \cos(\vec{n}\ \vec{z}) \quad \text{(D-9)}.$$

b) *Ecuaciones del movimiento de un medio material.* -

Sea ρ la ley de distribución de las densidades, y $\vec{v}$ el campo de las velocidades. Sea el volumen V limitado por una superficie S.

La ecuación de Newton para una partícula se escribe

$$\rho dV . \frac{d\vec{v}}{dt} = \Delta\vec{P}$$

donde $\Delta\vec{P}$ es la resultante de todas las fuerzas internas (o de masa) y superficiales que actúan sobre la partícula. Las fuerzas interiores de acción recíproca entre las partículas se equilibran al considerar todo el volumen V, quedan pues sólo las fuerzas másicas y las fuerzas superficiales.

La ley de Newton para el volumen V puede pues escribirse

$$\int_{(V)} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \Sigma\Delta\vec{p} = \int_{(V)} \rho \vec{F} dV + \int_{(S)} \vec{T}_n dS \qquad \text{(D-10)}$$

donde el primer sumando del último miembro representa las fuerzas distribuídas sobre la masa del cuerpo y el segundo sumando, las fuerzas superficiales.

Teniendo en cuenta la distribución de esfuerzos en cada punto de la superficie (D-9) y la fórmula de Gauss (D-4) se tiene sucesivamente

$$\int_{(S)} \vec{T}_n dS = \int_{(S)} [\vec{T}_x \cos(\vec{n};\vec{x}) + \vec{T}_y \cos(\vec{n};\vec{y}) +$$

$$+ \vec{T}_z \cos(\vec{n};\vec{z})] dS = \int_{(V)} \left(\frac{\partial\vec{T}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{T}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{T}_z}{\partial z}\right) dV$$

Llevando este valor en la ley de Newton (D-10) se obtiene

$$\int_{(v)} [\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho\vec{F} - \frac{\partial\vec{T}_x}{\partial x} - \frac{\partial\vec{T}_y}{\partial y} - \frac{\partial\vec{T}_z}{\partial z}] dV = 0$$

y como ello debe cumplirse sea cual fuere V:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} (\frac{\partial\vec{T}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{T}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{T}_z}{\partial z}) \qquad \text{(D-11)}$$

c) *Ecuaciones de Euler para un flúido perfecto.-*

En este caso los esfuerzos son normales a la superficie

croresPondiente. Luego $\vec{T}_x = - P_x\vec{i}$, $\vec{T}_y = - P_y\vec{j}$, $\vec{T}_z = -P_z\vec{k}$, el menos proviene de que se trata de compresiones.

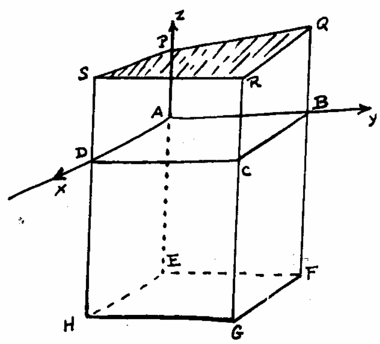
La ecuación del movimiento se torna

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}(\frac{\partial P_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\vec{k})$$

Tomando en cuenta la conocida ley de Pascal $P_x = P_y = P_z$. Se tiene la ecuación vectorial re Euler

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{ grad } \vec{P} \qquad \text{(D-12)}$$

V.- ONDAS DE MAREA.-



Estas ondas se presentan cuando la longitud de onda es mucho mayor que la profundidad del líquido en oposición a las *ondas superficiales* que no consideran esta restricción y que no serán estudiadas aquí.

Supongamos que las aceleraciones verticales puedan despreciarse.

La ecuación (D-12), puede escribirse en forma cartesiana:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

y ecuaciones análogas para v_y y v_z.
Si despreciamos la aceleración en el sentido de OZ,entonces

$$\frac{dt}{dv_z} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \qquad \text{se convierte en}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \qquad \text{o sea} \qquad p = -g\rho z + \text{constante.}$$

Tomemos el plano xy en la superficie libre no perturbada y sea $\zeta(xyt)$ la elevación del agua sobre el punto (x,y,o).

Si $p = p_o$ es la presión atmosférica para $z = \zeta$, se tendrá

$$p_o = -g\rho\zeta + \text{const.} \quad \therefore \quad \text{const.} = p_o + g\rho\zeta$$

Luego

$$p = p_o + g\rho(\zeta - z)$$

Llevando este valor en las ecuaciones del movimiento horizontal tendremos

$$\frac{dv_x}{dt} = -g\frac{\partial\zeta}{\partial x} \; ; \; \frac{dv_y}{dt} = -g\frac{\partial\zeta}{\partial y} \qquad \text{(D-13)}$$

Como los segundos miembros no dependen de la cota z, se concluye que la aceleración horizontal es la misma en todas las profundidades. Así pues, en el transcurso de las vibraciones en agua tranquila, las partículas de agua permanecen en un mismo plano vertical.

En la figura anexa, veamos ahora el líquido limitado a una superficie prismática definida por los planos x, x+dx, y, y+dy. ABCD es la superficie no perturbada, EFGH el fondo del líquido y PQRS es la superficie móvil situada a una altura $\zeta(xy)$ sobre ABCD.

Sea h= AE la profundidad.

Ecuación de continuidad.- En este caso no pudiendo determinar fácilmente una superficie S limítrofe, no podemos utilizar la ecuación (D-8): $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

Hagamos pues un razonamiento directo. En la dirección Ox la cantidad de flúido que entra por la cara PQFE es $[v_x (h + \zeta)\, dy]_x$ la cantidad que sale por la cara SRGH es $[v_x(h + \zeta)\, dy]_{x+dx}$ el resultado neto es una pérdida

$$[v_x (h + \zeta) dy]_{x+dx} - [v_x (h + \zeta) dy]_x =$$

$$[v_x (h + \zeta) dy]_x + \frac{\partial}{\partial y} [v_x (h + \zeta)\, dy]\ dy\, dx + \ldots -$$

$$[v_x (h + \zeta) dy]_x = \frac{\partial}{\partial x} [v_y (h+\zeta)]\, dx\, dy$$

Para los otros dos planos resulta una pérdida

$$\frac{\partial}{\partial y} [v_y (h+\zeta)]\, dx\, dy:$$

La pérdida total está compensada por una disminución en el nivel del agua, cuyo volumen es $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ dx dy.

Luego

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[v_y (h+\zeta)\right] dx\, dy + \frac{\partial}{\partial x}\left[v_x (h+\zeta)\right] dx\, dy = -$$

$$- \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx\, dy.$$

puesto que $v_y\zeta$ y $v_x\zeta$ son cantidades de segundo orden se pueden despreciar, se obtiene:

$$\frac{\partial (hv_x)}{\partial x} + \frac{\partial (hv_y)}{\partial y} = - \frac{\partial G}{\partial t} \quad \text{(D-14)}$$

Combinando esta relación con las ecuaciones (D-13), modificadas: así $\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} =$

$= - g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$, en donde se desprecian los términos cuadráticos en las velocidades, se convierte en

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \text{ y también } \frac{\partial v_y}{\partial t} = - g \frac{\partial \zeta}{x} \quad \text{(D-14a)}$$

Combinándolas con (D-14), se obtiene pues: Derivando D-14 con respecto al tiempo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}; \qquad \text{(D-15)}$$

Si h es constante (depósito de profundidad constante), se obtiene

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \qquad \text{en que } c^2=gh \quad \text{(D-16)}$$
$$c=\sqrt{gh}$$

Condiciones generales de contorno.-

(1) $v_z = o$ para $z = -h$.

(2) $\frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0$ en un contorno paralelo al eje y.

$\frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0$ en un contorno paralelo al eje x.

(3) $\frac{\partial\zeta}{\partial \nu} = 0$ en cualquier contorno fijo,donde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ designa

derivación según la normal del contorno.

Esta última condición se puede apreciar llamando $bx+my=1$ el contorno fijo. La componente de la velocidad perpendicular a esta dirección debe anularse, o sea $lu+mv=o$

Derivando con respecto a t: $\quad l\frac{\partial v_x}{\partial t}+m\frac{\partial v_y}{\partial t}=0$

y utilizando las relaciones (D-14a), obtenemos

$$l \frac{\partial \zeta}{\partial x} + m \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$$

que es la condición representada por (3).

APLICACIONES.-

a) *Depósito rectangular.*

Sean sus lados $x=o$, $x=a$, $y=o$, $y=b$.

La solución de D-16 es de la forma

$$\zeta = \begin{matrix}\cos\\ \text{sen}\end{matrix}\ px \ \begin{matrix}\cos\\ \text{sen}\end{matrix}\ qy \ \begin{matrix}\cos\\ \text{sen}\end{matrix}\ rct \qquad \text{en que } \ p^2+q^2=r^2.$$

Para que se cumplan las condiciones de contorno (1) y (2) la solución debe ser:

$$\zeta = A \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \cos (r\pi ct+\Sigma)$$

donde

$$r^2 = \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}, \qquad p=0, 1, 2..... \ q=0, 1, 2, 3.....$$

La frecuencia de este modo normal es $\frac{rc}{2}$

Determinación de las constantes.-

La solución general del problema será la suma de los modos normales

$$\zeta = \sum_{p;q} A_{pq} \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \cos (r\pi ct+\varepsilon)$$

La determinación de los coeficientes A_{pq} conduce a una extensión de las series de Fourier a una función de dos variables.

b) *Depósito circular.-*

En este caso, se transforma primero la ecuación D-16 en coordenadas polares

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\ \frac{\partial\zeta^2}{\partial t^2}$$

Recordando que $x = r \cos\vartheta$, e $y = r \operatorname{sen}\vartheta$, se calculan las cantidades que aparecen en (D-16), y se combinan de manera que aparezca dicha expresión D-16. La ecuación de las ondas se convierte entonces en

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial\vartheta^2} = \frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$$

Vale observar que la condición de contorno (3) se traduce aquí

en $\dfrac{\partial\zeta}{\partial r} = 0$

La solución de (D-17) se puede buscar, suponiéndola de la forma

$$\zeta = R(r)\ \Theta(\vartheta)\ T(t) \qquad \text{(D-18)}$$

lo cual da origen a una separación de variables y a la introducción de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(n^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0$$

$$\Theta'' + m^2\,\Theta = 0$$

$$T'' + c^2 p^2 T = 0$$

con $n^2 = p^2 - q^2$.

La primera de estas ecuaciones es de Bessel, las otras lineales de segundo orden.

La forma general de la solución es

$$\zeta = \begin{matrix} J_m \\ \\ K_m \end{matrix} (nr) \begin{matrix} \cos \\ \\ \text{sen} \end{matrix} m\vartheta \begin{matrix} \cos \\ \\ \text{sen} \end{matrix} cpt \qquad \text{(D-19)}$$

en que como se sabe

$$J_m\ (nr) = \frac{(nr)^m}{2^m\,\Gamma(m+1)} \sum_{k=o}^{\infty} (-1)^k \frac{(nr)^{2k}}{4^k\,k!\,(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$$

$$K_m\ (nr) = J_m(nr)\ \text{Log}(nr) + \frac{1}{(nr)^m}\left[-\tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(m\text{-}k\text{-}1)!}{k!} \left(\frac{nr}{2}\right)^{2k} + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n\text{-}k\text{-}1)!} \left(\frac{nr}{2}\right)^{2k} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots. \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2} + \ldots. \frac{1}{m+k}\right)\right]$$

Para $r=0$, $K_m \rightarrow \infty$, luego se descartará esta solución y se tomará

$$\zeta = A_m\, J_m\ (nr).\ \cos m\vartheta.\ \cos(cnt+\varepsilon) \qquad \text{(D-20)}$$

Para que se cumpla la condición de contorno para $r=a$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0$$

se necesita que

$$J'_m(nr) = 0$$

para un valor dado de m, entero, esta condición determina un número infinito de valores de n que se podrían hallar en las tablas de funciones de Bessel.

Llamemos estos valores

$$n_{m,1}; \quad n_{m,2}; \ldots\ldots \quad n_{m,x}\ldots\ldots$$

La frecuencia es entonces $\dfrac{cn_{m,x}}{2\pi}$ y para uno de estos valores

tendremos pues un modo normal (m,k) de la vibración.

BIBLIOGRAFIA:

ONDAS por C.A. Coulson

HIGHER MATHEMATICS by Burington and Torrance.