SOBRE LOS TEOREMAS DEL VALOR MEDIO Y LA REGLA DE L'HOPITAL

Por
ROBERTO VARGAS
Profesor de la Facultad de Ingeniería

F. Severi en sus "Lecciones de Análisis" (*Traducción al castellano de la Editorial Labor,* 1951) página219, hace las siguientes hipótesis para la aplicación de la regla de L' Hopital:

"Sean $f(x)$, $\varphi(x)$ dos funciones continuas y nulas en$x=a$, derivables en un entorno de a (excluído a á lo más). Además, se supone que $\varphi'(x)$ no sea nunca nula en dicho entorno (excluído a lo más, a). Entonces, si existe el límite para $x\to a$ de la razón $f'(x)/\varphi'(x)$, existe también el límite para $x\to a$ de la razón $f(x)/\varphi(x)$, y subsiste la relación.

$$\lim_{x\to a} f(x)/\varphi(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/\varphi'(x). \quad "$$

Burington and Torrance en su libro Higher Mathematics (Mc Graw Hill, First Edition, 1939) página 68, y J. Rey Pastor en su Teoría de Funciones (Madrid,1947) página 105, hacen sobre la misma Regla las hipótesis:

"Si las funciones continuas $f(x)$ y $\varphi(x)$ y nulas en el punto a, siendo $\varphi(x)$ distinto de cero en un entorno de este punto, tienen derivadas $f'(x)$ y $\varphi'(x)$ que no se anulan simultáneamente en un cierto entorno de dicho punto (excepto en el mismo punto a, donde pueden ser ambas nulas, e incluso no existir) y el cociente de derivadas tiene un límite finito o infinito para $x\to a$, se verifica:

$$\lim_{x\to a} f(x)/\varphi(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/\varphi'(x). \quad "$$

El lector observará que F. Severi substituye las dos hipótesis de no anularse simultáneamente $f'(x)$ y ($\varphi'(x)$ en un entorno de a y la ed ser $\varphi(x)\neq 0$ en un entorno de este punto, por la hipótesis única de que $\varphi'(x)$ no sea nunca nula en un entorno de a (excluído a lo más, a).

Ambas hipótesis, la de F. Severi y la de los otros autores citados, son igualmente rigurosas y expresan condiciones suficientes para la aplicación de la regla de L' Hopital, pero nosotros vamos a demostrar que la de Severi es menos ventajosa por ser más exigente, es decir, que existen menos funciones que satisfacen sus hipótesis.

En efecto, si es $\varphi'(x) \neq 0$ para todo x del entorno distinto del a, resulta también en dicho entorno $\varphi(x) \neq 0$ (teorema contrarrecíproco de Rolle), por consiguiente, la hipóteiss $\varphi'(x) \neq 0$ implica que $\varphi(x) \neq 0$ y también, evidentemente, la no anulación simultánea de las derivadas. El recíproco no es cierto como lo prueba el ejemplo que sigue:

Las funciones:

$$f(x) = \pi x + \operatorname{sen}\pi x, \left\{ \begin{array}{r} \varphi(x) = x^3(\operatorname{sen}\pi/x + 2)\ \text{para}\ x \neq o \\ \varphi(x) = 0\ \text{para}\ x = 0 \end{array} \right\}$$

nulas en el punto $x = 0$, son continuas y derivables en todo el campo real y sus derivadas

$$f'(x) = \pi + \pi\cos\pi x, \quad \varphi'(x) = 3x^2(\operatorname{sen}\pi/x + 2) - \pi x\cos\pi/x$$
$$f'(x) = \ + \ \cos\ x, \quad \varphi'(x) = 3x^2(\operatorname{sen}\ /x + 2) - \pi x\cos\pi/x$$

no se anulan simultáneamente en el intervalo $(-1,1)$ ya que $f'(x) \neq 0$ para todo x que cumpla la limitación, $-1 \angle x \angle 1$
$\pi + \pi\cos\pi x = 0$; $\cos\pi x = -1$; $x = \pm(2K+1)$, $K = 0,1,2,...$

La función $\varphi(x) = x^3(\operatorname{sen}\pi/x + 2)$ es distinta de cero para todo $x \neq 0$ y en todo entorno del origen existen puntos donde $\varphi'(x) = 0$. En efecto, en los puntos $x = 1/2; x = 1/3, x = 1/4, ... x = 1/n...$ $\varphi'(x)$ cambia de signo, por tanto, en cada uno de los intervalos $(1/3, 1/2)$, $(1/4, 1/3)$, ..., $(1/n, 1/n-1)$, ..., existe al menos un punto donde $\varphi'(x) = 0$ (teorema de Rolle).

Acabamos de ver que las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ de nuestro ejemplo no satisfacen las hipótesis de F. Severi pero si cumplen las de Burington - Torrance y J. Rey Pastor. La regla de L' Hopital enunciada por Severi no puede aplicarse al cálculo del

$$\lim_{x \to o} \pi x + \operatorname{sen}\pi x / x^3(\operatorname{sen}\pi/x + 2);$$

por el contrario, la enunciada en segundo lugar nos dá

$$\lim_{x \to o} \frac{\pi x + \operatorname{sen} \pi x}{x^3 \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{x} + 2\right)} = \lim_{x \to o} \frac{\pi + \pi \cos \pi x}{3x^2 \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{x} + 2\right) - \pi x . \cos \frac{\pi}{x}} = \infty$$
