UN PROBLEMA DE PESADAS

Por
VICTOR L. MASJUAN
Profesor de la Universidad Central de Venezuela

Entre los aficionados a las "curiosidades matemáticas" circula este problema: "En un grupo de DOCE bolitas hay UNA que tiene un *peso diferente* a las once restantes que son de igual peso entre sí. Por medio de tres pesadas de comparación, en una balanza de platillos, determinar cuál es la bolita de distinto peso y averiguar si pesa más o menos que las otras". En la presente Nota se determina el número mínimo de pesadas para el caso de N bolitas.

PROBLEMA I.- "Se dan dos grupos de bolitas que continenen P y L respectivamente. Todas son de igual peso ("normales") excepto una ("extraña") que tiene diferente peso a las otras. Se sabe, además, que si la "extraña" se encuentra en el grupo P es *más pesada* que las "normales"; si en cambio se encuentra en el grupo L *es más liviana* que éstas. Se pide encontrar la bolita "extraña" en el menor número de pesadas y precisar si es más pesada o nó que las "normales"."

Con la notación $(P,L)_n$ se entenderá un par de grupos de bolitas que cumplen con las hipótesis del problema y para el cual bastan n pesadas de comparación par dar la respuesta pedida.

Al efectuar cualquiera pesada de comparación (forzosamente entre igual número de bolitas), el operador tiene la siguiente libertad de acción: dividir el grupo P en tres subgrupos P_1, P_2, P_3 que colocará, respectivamente, en el platillo izquierdo, platillo derecho y fuera de la comparación; a su vez se dividirá L en subgrupos L_1 que colocará en el platillo *derecho*, L_2

que irá al izquierdo y L_3 fuera de la comparación. Todo lo cual se representa como sigue:

Platillo izquierdo	Platillo derecho	Fuera de comparación
$(P_1,L_2)_{n-1}$	$(P_2,L_1)_{n-1}$	$(P_3,L_3)_{n-1}$

Sujetas estas particiones a las siguientes igualdades entre los números de bolitas:

$$(1) \qquad P=P_1+P_2+P_3 \qquad L=L_1+L_2+L_3 \qquad P_1+L_2=P_2+L_1$$

Si la comparación produce equilibrio, la bolita "extraña" se encuentra en el par $(P_3,L_3)_{n-1}$; si desequilibrio, se halla entre las que se han comparado. Al caer el platillo izquierdo se concluye que si la "extraña" es más pesada que las "normales" está en subgrupo P_1 y si es más liviana en el L_1; si en cambio cae el platillo derecho la "extraña" está en el par $(P_2,L_2)_{n-1}$. Las tres posibilidades (un caso de equilibrio y dos de desequilibrio) conducen a un problema semejante al que se desea resolver.

Por lo tanto un par de números naturales P y L es solución del problema $(P,L)_n$ cuando se pueden descomponer en tres sumandos, respectivamente, tales que sean soluciones de $(P_i,L_i)_{n-1}$ $(i = 1,2,3)$ y se cumplan las siguientes igualdades (1). Naturalmente que todo par de números que es solución de $(P,L)_n$ lo es también de $(P,L)_{n+1}$.

Para determinar estos pares de números se comenzará por encontrar las soluciones para los casos $n = 0$ y $n = 1$. El conjunto de las soluciones se denominará por el símbolo C_n. Cada conjunto C_n contiene los de menor orden C_{n-1}, C_{n-2}, etc.

El conjunto C_0 está formado por las soluciones $(0,0)^0$, $(1,0)_0$ y el simétrico $(0,1)_0$. Estos casos no tienen sentido aisladamente ya que para que haya problema deben darse no menos de 3 bolitas, puesto que con dos bolitas cualquiera es la "extraña" y con una bolita ella es al mismo tiempo la "extraña". Pero si tienen sentido cuando forman parte con otros pares en la composición del par propuesto.

El conjunto C_1 está formado, aparte de las soluciones anteriores, por la composición de ellas de acuerdo con las igualdades (1). Tales pares son (3,0), (2,1) y los simétricos. El par (1,1) no tiene sentido en si; pero si se ha averiguado que otras bolitas son "normales" (es decir que forma parte de una solución de un conjunto de mayor orden) por medio de una pesada de comparación entre una "normal" y una del par (1,1) se decide cuál es la "extraña" junto con la característica de su peso; por consiguiente el par $(1,1)_1$ pertenece al conjunto de primer orden.

En resumen, con *cero* pesadas las soluciones $(P,L)_0$ contienen en total un máximo de una bolita; con *una* pesada las soluciones alcanzan hasta un máximo de 3 para la suma P+L. En consecuencia, para dos pesadas se podrán encontrar soluciones $(P,L)_2$ cuya suma P+L no pase de $3^2=9$, etc. La solución para n pesadas será un par de números naturales cualesquiera siempre que su suma no pase de 3^n. El conjunto de soluciones en las cuales se necesitan no menos de n pesadas, pero no más, está formado por la diferencia de C_n y C_{n-1}.

Es claro que dado un par cualquiera puede localizarse la bolita "extraña" en sólo dos pesadas si al elegir tres bolitas del total de ellas y efectuar dos comparaciones entre las tres se tiene la "suerte" de dar con la bolita buscada. Pero el problema consiste en determinar el modo de operar de modo que aún contra la "mala suerte" que pueda perseguir al operador este localice la bolita buscada en el menor número de pesadas y pueda decir la característica de su peso.

Una posible partición del par $(P,L)_n$ en tres pares $(P_i, L_i)_{n-1}$ que satisfagan las condiciones (1) consiste en elegir $P_1 = P_2$; $L_1 = L_2$; P_1 el número más grande contenido en la semisuma de P y L sin que pase de 3^{n-1} y L_1 el número más grande posible sin sobrepasar ni al complemento de P_1 a 3^{n-1} ni a la mitad de L. (Un problema que se propone al lector es el de clasificar todas las particiones posibles para un par dado).
PROBLEMA II. "En un grupo de N bolitas hay una "extraña" de peso diferente a las demás N-1 que son de igual peso entre sí ("normales"). Además hay aparte un grupo de M bolitas de tipo "normal". Encontrar la bolita "extraña" en el menor

número de pesadas y averiguar si es más liviana que las "normales" o más pesada".

En la primera pesada el operador podrá colocar A bolitas en el platillo izquierdo, B en el derecho y dejar el resto C=N-A-B fuera de comparación. Como es necesario que haya igual número de bolitas en ambos platillos el operador coloca el número que falta en un platillo tomándolo del grupo M de bolitas "normales", lo cual facilita la comparación, pero no afecta las conclusiones acerca de los grupos A y B. El resultado será un equilibrio de los platillos y en consecuencia la "extraña" está en el grupo C o se produce un desequilibrio. En este último supuesto si cae el platillo izquierdo la "extraña" o está en A y es más pesada o está en B y es más liviana que las normales. Si cae el platillo derecho la conclusión es inversa. En ambos casos (A,B) o (B,A) se está en presencia de un caso tratado en el problema I. Si la solución del problema II requiere n pesadas, el operador debe elegir una solución $(A,B)_{n-1}$ para la primera pesada. Si A+B es un número par puede utilizarse la solución equivalente en que cada grupo es la semisuma de A y B y no sería necesario recurrir al grupo de M bolitas "normales" para completar la diferencia entre los platillos; pero si A+B es impar se necsitaría una bolita del grupo M. Es el caso cuando N es el mayor número de bolitas que permite la solución en n pesadas, pues en tal caso A+B debe tener su valor máximo que es 3^{n-1} el cual es número impar.

Así pues el número N puede ser mayor de 3^{n-1} en un número C. Si se produce equilibrio en la primera pesada la bolita buscada está en C y debe darse la solución en no más de n-1 pesadas; pero esto es un problema semejante al que se quiere resolver. Por consiguiente C podrá valer hasta $3^{n-2} + D$ y a su vez D podrá valer hasta $3^{n-3} + E$, etc. Finalmente N tiene como valor máximo $3^{n-1} + 3^{n-2} + 3^{n-3} + \dots 3^2 + 3^1 + 3^0$ ya que al final en una sola pesada se puede dar la solución si queda justo una sola bolita de donde averiguar su peso. O sea que el valor máximo de bolitas de cuyo grupo se puede averiguar cuál es la "extraña" y dar su peso en relación con una "normal" vale, para el caso de n pesadas, $\frac{1}{2}(3^n-1)$.

PROBLEMA FINAL. Se dan N bolitas de las cuales N-1 tienen igual peso entre si y la otra es de un peso distinto. Encontrar esta bolita "extraña" en el menor número de pesadas y decir si pesa más o si pesa menos que las N-1 "normales".

Este es el caso general del problema que se cita al comienzo de esta Nota. Aquí no existe el grupo de M bolitas y por consiguiente en la primera operación de pesar no se puede utilizar el máximo de $A+B$ que es 3^{n-1} sino el número inferior en una unidad. De ahí, pues, que la solución de este último problema sea un N máximo una unidad menos que en el problema II, o sea $N = \frac{1}{2}(3^n-3)$. Luego todos los N mayores que $\frac{1}{2}(3^{n-1}-3)$ hasta $\frac{1}{2}(3^n-3)$ requieren un mínimo de n pesadas para dar con la solución del problema.

Observación final. Nuestro distinguido amigo el Profesor Andrés Zavrotski ha tenido la amabilidad de comunicarnos que este problema se menciona en el libro "Mathematical Snapshots" de H. Steinhaus página 45 (New York 1951), y la fórmula correspondiente para el número máximo de bolitas. No hay duda pues que deben haberse publicado algunas demostraciones; pero ellas no han llegado hasta nosotros. Por pensar que la exposición anterior puede ser de interés par los aficionados a las "curiosidades matemáticas" nos atrevemos a sus publicación sin pretender, por lo que queda dicho, ni originalidad ni prioridad en la demostración.

Y finalmente una cuestión que planteamos a los lectores: ¿Se puede generalizar el problema para el caso de dos bolitas extrañas, entre si de igual o distinto peso?