

**DETERMINACION DE LA ENVOLVENTE DE FALLA POR CIZALLAMIENTO EN  
MACIZOS ROCOSOS APLICANDO EL CRITERIO DE HOEK Y BROWN**

Roberto, UCAR NAVARRO  
Escuela de Ingeniería Civil  
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela

**RESUMEN**

Se desarrolla una expresión analítica que permite hallar la resistencia al corte en macizos rocosos al utilizar el criterio empírico de rotura desarrollado por los investigadores Hoek y Brown, en el cual los esfuerzos principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  en el instante de la falla están vinculados a través de la ecuación  $\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_c (m \sigma_3 / \sigma_c + s)$ , siendo  $\sigma_c$  la resistencia de la compresión simple de la roca intacta y los parámetros  $m$  y  $s$ , constantes que dependen de las características de la roca.

Aplicando esta nueva hipótesis, conjuntamente con la teoría de la elasticidad y los conceptos matemáticos básicos para obtener la envolvente a una familia de círculos de falla, se determina la resistencia al corte, tal que  $\tau_{\alpha} = f(\sigma_{\alpha}, \sigma_c, m, s)$ , en donde  $\sigma_{\alpha}$  es el esfuerzo normal sobre el plano de rotura. Una expresión de este tipo ayuda a desarrollar nuevos métodos de cálculo en lo concerniente a: estabilidad de taludes y galerías, diseño del soporte en macizos rocosos mediante anclajes, estimación de la resistencia por el fuste en roca de baja calidad en cimentación por pilote y otras innumerables aplicaciones relacionadas con el campo de la Geotécnica.

**ABSTRACT**

**Determination of shear failure envelope in rock masses.** In this work, an analytic expression has been developed that enables the shear strength to be determined using the empirical failure criterion developed by Hoek and Brown. Applying this new hypothesis, along with elasticity theory and basic mathematical concepts for obtaining the failure envelope of a family of failure circles, the shear strength has been determined to be such that  $\tau_{\alpha} = f(\sigma_{\alpha}, \sigma_c, m, s)$  where  $\sigma_{\alpha}$  the normal stress on the discontinuity,  $\sigma_c$  the uniaxial compressive strength of the intact rock and the parameter  $m$  and  $s$  are constant dependent upon the properties of the rock.

An expression of this type will help us develop new methods of analysis of slope stability and support of galleries, design of anchor support systems in rock masses, estimation of the skin friction of poor quality rock in driven pile foundations, as well as in other innumerable related areas of geotechnology.

**INTRODUCCION**

En la década del setenta, en el Departamento de Ingeniería de Recursos Minerales, de la Escuela de Minas de Londres, Hoek y Brown<sup>1</sup> llevaron a cabo

una gran cantidad de ensayos experimentales en rocas de diferentes propiedades geomecánicas, con la finalidad de poder interpretar en detalle el mecanismo de falla en macizos rocosos.

Con esto en mente, y tomando como soporte fundamental el postulado propuesto por Griffith<sup>2</sup>, en el cual se establece que para que se produzca la rotura la relación de la tensión principal  $\sigma_1$  y la tensión principal menor  $\sigma_3$  debe ser igual a  $(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 8 \sigma_t(\sigma_1 + \sigma_3)$ , debiéndose cumplir además que  $(\sigma_1 + 3 \sigma_3) > 0$ . Siendo  $\sigma_t$  la resistencia a la tracción, y por lo tanto la resistencia a la compresión simple  $\sigma_c = 8 \sigma_t$  al considerar  $\sigma_3 = 0$ .

Así, con dicha hipótesis y las modificaciones y extensiones realizadas por otros investigadores sobre la misma teoría, ambos autores llegaron a obtener un nuevo criterio empírico de falla utilizando una ecuación cuadrática que relaciona  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  en función de  $\sigma_c$  y de los parámetros  $m$  y  $s$  los cuales dependerán a su vez de las propiedades del macizo rocoso.

También a través de dicha fórmula se obtendría un gran avance en el campo de la mecánica de las rocas, si se pudiera lograr la verdadera solución analítica para determinar la resistencia al corte ( $\tau_d$ ) bajo un determinado rango de esfuerzos en rocas con diferentes planos de fracturas; habiéndose logrado en una forma empírica y aproximada por Hoek y Brown<sup>1</sup>, debido a lo complejo de hallar un resultado matemáticamente preciso.

En base a lo antes dicho se ha analizado en este trabajo la solución exacta utilizando el criterio de falla ya mencionado para calcular la envolvente de rotura por cizallamiento, que proporcione una base adecuada para estimar las tensiones tangenciales tanto en roca intacta como en macizos rocosos con diferentes planos de discontinuidad; de forma de poder resolver gran variedad de problemas que habitualmente se encuentran en el área de la Mecánica de Rocas planteados en las obras mineras o de Ingeniería Civil.

#### **DETERMINACION DE LA ENVOLVENTE DE FALLA POR CIZALLAMIENTO EN MACIZOS ROCOSOS, MEDIANTE EL CRITERIO EMPIRICO DE HOEK Y BROWN<sup>1</sup>.**

A través de innumerables ensayos de laboratorio, conjuntamente con los fundamentos que existen sobre fractura y propagación de grieta en roca, Hoek y Brown<sup>1</sup> hallaron la nueva hipótesis de rotura estableciendo la siguiente relación entre los esfuerzos principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ , es decir:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_c \left( m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2} \quad (1)$$

donde:

- $\sigma_1$  = Esfuerzo principal mayor en la falla
- $\sigma_3$  = Esfuerzo principal menor
- $\sigma_c$  = Resistencia a la compresión simple en roca "intacta"
- $m, s$  = Constantes que dependen de las propiedades de la roca

En la tabla N° 1, se puede apreciar los diferentes valores de  $m$  y  $s$ , dependiendo del grado de diaclasamiento y de meteorización del macizo.

La resistencia a la compresión simple en roca intacta  $\sigma_c$  se obtiene al tomar en cuenta que no existe confinamiento lateral ( $\sigma_3 = 0$ ), y que además  $s = 1$ , resultando por tanto de (1) que  $\sigma_1 = \sigma_c$ .

Cuando el macizo presenta planos de fractura,  $s < 1$ , la resistencia en la discontinuidad dominante será  $\sigma_{cd} = \sigma_c (s)^{1/2}$ .

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación (1) y dejando  $\sigma_3$  resulta:

$$\sigma_3 = \left( \sigma_1 + \frac{m}{2} \sigma_c \right) - \frac{1}{2} (m^2 \sigma_c^2 + 4m \sigma_1 \sigma_c + 4s \sigma_c^2)^{1/2} \quad (2)$$

Tomando la raíz no positiva de  $(m^2 \sigma_c^2 + 4m \sigma_1 \sigma_c + 4s \sigma_c^2)$  ya que  $\sigma_3$  corresponde al esfuerzo principal menor, se tiene por tanto:

$$\sigma_3 = \left( \sigma_1 + \frac{m}{2} \sigma_c \right) - \frac{1}{2} (m^2 \sigma_c^2 + 4m \sigma_1 \sigma_c + 4s \sigma_c^2)^{1/2} \quad (3)$$

La resistencia a la tracción  $\sigma_t$  se determina al considerar  $\sigma_1 = 0$ , así la ecuación anterior toma la forma:

$$\sigma_3 = \sigma_t = \frac{\sigma_c}{2} [m - (m^2 + 4s)^{1/2}] \quad (4)$$

A través de (1) y (4) se aprecian los límites de  $s$ , es decir:

$$\begin{aligned} s = 1, \sigma_1 &= \sigma_c \quad \therefore \text{roca intacta} \\ s = 0, \sigma_3 &= \sigma_t = 0 \quad \therefore \text{roca muy fracturada} \end{aligned}$$

De lo anterior resulta, que para otros estados intermedios del macizo rocoso, ( $s$ ) se encontrará dentro del entorno  $0 < s < 1$ .

TABLA 1. CRITERIO EMPÍRICO DE FALLA SEGUN HOKK Y ERWIN

$\sigma_1 \times \sigma_3 + \sigma_c \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} \right)^{1/2}$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} \times A \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} \right)^B$	Q	Roca compuesta de carbonatos Caliza Dolomía	Roca productiva de la litificación o metamorfismo Limonita Limonita Limonita Limonita Pizarra	Rocas Esquizoas Arenisca Cuarcita	Rocas ígneas grano fino Riolita Andesita Basalto	Rocas de grano grueso ígneas y metamórficas Granito Diorita, gneiss, - anfilita
Roca Intacta (Muestras de Laboratorio)	500	m = 2.0 s = 1.0 A = 0.816 B = 0.658 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.140$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 10.0 s = 1.0 A = 0.918 B = 0.677 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.095$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 15.0 s = 1.0 A = 1.044 B = 0.692 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.067$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 17.0 s = 1.0 A = 1.085 B = 0.696 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.657$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 25.0 s = 1.0 A = 1.220 B = 0.705 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.640$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$
Roca de muy buena calidad no alterada con fisuras, diaclasas B = 3 m.	100	m = 3.5 s = 0.1 A = 0.651 B = 0.679 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.028$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 5.0 s = 0.1 A = 0.724 B = 0.682 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.020$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 7.5 s = 0.1 A = 0.848 B = 0.702 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.013$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 8.5 s = 0.1 A = 0.883 B = 0.705 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.012$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 12.5 s = 0.1 A = 0.998 B = 0.712 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.008$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$
Roca de buena calidad ligeros alteraciones, diaclasas espaciadas 1-3m.	10	m = 6.7 s = 0.004 A = 0.369 B = 0.669 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.006$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 1.0 s = 0.004 A = 0.427 B = 0.683 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.004$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 1.5 s = 0.004 A = 0.501 B = 0.695 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.003$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 1.7 s = 0.004 A = 0.525 B = 0.698 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.002$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 2.5 s = 0.004 A = 0.603 B = 0.707 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.002$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$
Roca de mediana calidad con indicios de entorpecimiento, diaclasas espaciadas 0.3-2m.	1	m = 0.14 s = 0.0001 A = 0.190 B = 0.662 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.0007$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 0.20 s = 0.0001 A = 0.236 B = 0.675 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.0005$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 0.30 s = 0.0001 A = 0.280 B = 0.688 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.0003$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 0.34 s = 0.0001 A = 0.295 B = 0.691 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.0003$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 0.50 s = 0.0001 A = 0.346 B = 0.700 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.0002$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$
Rocas de calidad pobre con numerosos diaclasas 30-500 m	0,1	m = 0.04 s = 0.00001 A = 0.115 B = 0.646 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.0002$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 0.05 s = 0.00001 A = 0.129 B = 0.658 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.0002$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 0.08 s = 0.00001 A = 0.162 B = 0.672 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.0001$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 0.09 s = 0.00001 A = 0.172 B = 0.676 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.0001$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 0.13 s = 0.00001 A = 0.203 B = 0.686 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0.0001$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$
Roca de calidad muy pobre, altamente diaclasada y meteorizada. Diaclasas 50 mm.	0,01	m = 0.007 s = 0 A = 0.042 B = 0.534 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 0.010 s = 0 A = 0.080 B = 0.559 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 0.015 s = 0 A = 0.061 B = 0.546 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 0.017 s = 0 A = 0.065 B = 0.548 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$	m = 0.025 s = 0 A = 0.078 B = 0.556 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = 0$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$

El valor de  $m$  en roca intacta puede hallarse midiendo el ángulo  $\alpha$  que forma la superficie de falla con la dirección del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$ .

Como posteriormente se demostrará, la magnitud de  $(\alpha)$  se determina mediante la siguiente expresión:

$$\tan \alpha = \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)^{1/2} = \left| 1 + \frac{s}{2(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s)^{1/2}} \right|^{1/2} \quad (5)$$

Considerando que:

$$s = 1 \quad \text{roca intacta}$$

$$\sigma_3 = 0 \quad \text{ensayo de compresión sin confinar}$$

Resulta:

$$\tan^2 \alpha = \left( 1 + \frac{m}{2} \right) \quad (6)$$

$$m = 2(\tan^2 \alpha - 1) \quad (7)$$

Salmer<sup>3</sup>, desarrolló una solución analítica para determinar la envolvente de falla para cualquier distribución de presiones  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  en el macizo.

A través de la teoría de las ecuaciones de equilibrio la figura (1), se sabe que:

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \quad \tau_n^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (8)$$

Donde  $\sigma_n$  y  $\tau_n$  representan el esfuerzo normal y tangencial sobre el plano de rotura respectivamente.

Tomando la derivada de  $\sigma_1$  con respecto a  $\sigma_3$  en ambos lados de la ecuación (8) queda:

$$2 \left| \sigma_n - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right| \left| - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} + 1 \right) \right| = 2 \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} - 1 \right) \quad (9)$$

$$\left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} - 1 \right) \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) + \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} + 1 \right) \left| \sigma_n - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right| = 0 \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} - 1\right) \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) + \sigma_\alpha \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} + 1\right) - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} + 1\right) = 0 \quad (11)$$

$$\sigma_\alpha \left(1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right) - \sigma_1 - \sigma_3 \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right) = 0 \quad (12)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_3 \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right) + \sigma_1}{\left(1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)} = \sigma_3 + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\left(1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)} \quad (13)$$

$$(\sigma_\alpha - \sigma_3) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\left(1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)} = \frac{2 \sigma_c \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s\right)}{m + 4 \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s\right)^{1/2}} \quad (14)$$

Reemplazando (13) en (8) y despejando  $\tau_\alpha$ , resulta:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\left(1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)^{1/2} \quad (15)$$

Al dividir (15) entre (14), se obtiene que:

$$\frac{\tau_\alpha}{(\sigma_\alpha - \sigma_3)} = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)^{1/2} \quad \therefore \tau_\alpha = (\sigma_\alpha - \sigma_3) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)^{1/2} \quad (16)$$

Por otro lado al observar el triángulo ABC de la figura (1), el ángulo de rotura se calcula a través de la expresión:

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)^{1/2} \quad (17)$$

Utilizando la ecuación (1), el valor de  $\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}$  corresponde entonces:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} = \left[ 1 + \frac{\pi}{2 \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s\right)^{1/2}} \right]^2 \quad (18)$$

Transformándose las ecuaciones (13), (15) y (17) como a continuación se describen:

$$\sigma_\alpha = \sigma_3 + \frac{2 \sigma_c \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s\right)}{m + 4 \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s\right)^{1/2}} \quad (19)$$

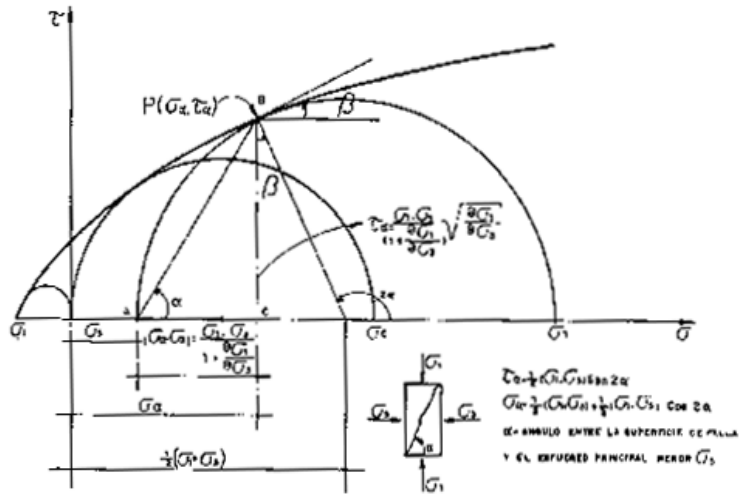


FIG.1.-ENVOLVENTE DE ROTURA POR CIZALLAMIENTO EN ROCA INTACTA

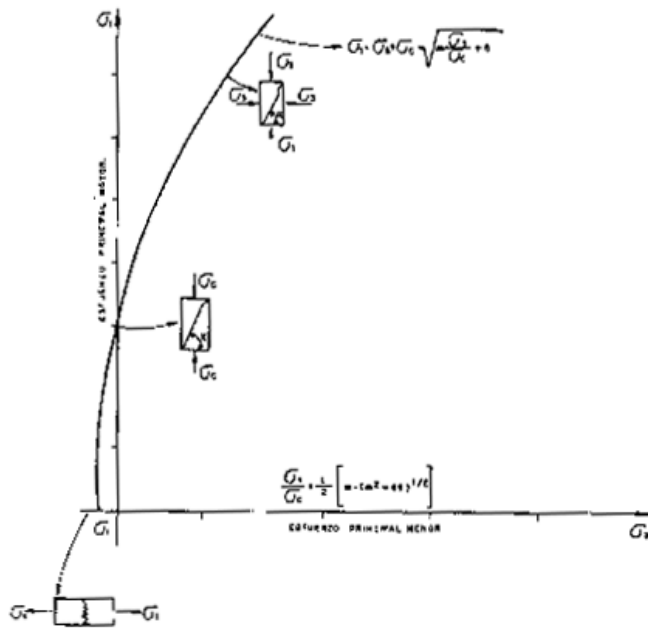


FIG.2.-RELACION ENTRE LOS ESFUERZOS PRINCIPALES DE ACUERDO AL CRITERIO DE FALLA DE HOEK Y BROWN.

$$\tau_{\alpha} = \frac{2 \sigma_c (m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s)}{m + 4 (m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s)^{1/2}} \left| 1 + \frac{m}{2 (m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s)^{1/2}} \right|^{1/2} \quad (20)$$

$$\tan \alpha = 1 + \left| \frac{m}{2 (m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s)^{1/2}} \right|^{1/2} \quad (21)$$

Igualmente al observar la Fig. (1) se aprecia que el ángulo de rotura  $\alpha$  y la inclinación de la envolvente de falla  $\beta$  están relacionados a través de la expresión:

$$2 \alpha = (\pi/2 + \beta) \quad (22)$$

$$\tan 2\alpha = \tan (\pi/2 + \beta) \quad (23)$$

$$\tan 2\alpha = -\cot \beta \quad \therefore \tan \beta \tan 2\alpha = -1 \quad (24)$$

$$\frac{d\tau_{\alpha}}{d\sigma_{\alpha}} = \tan \beta = \frac{\tan 2\alpha - 1}{2 \tan \alpha} = \frac{(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} - 1)}{2 (\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3})^{1/2}} = \tau'_{\alpha} \quad (25)$$

Llamando a  $\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} = \sigma'_1$ , queda entonces:

$$\tau'_{\alpha} = \frac{\sigma'_1 - 1}{2 (\sigma'_1)^{1/2}} \quad (26)$$

Lo cual se transforma como sigue:

$$0 = \sigma' - 2 \tau'_{\alpha} (\sigma'_1)^{1/2} - 1 \quad (27)$$

De donde:

$$(\sigma'_1)^{1/2} = \tau'_{\alpha} + \left| 1 + (\tau'_{\alpha})^2 \right|^{1/2} \quad (28)$$

Despejando en (11), se tiene:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{1}{2} \left| (\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\sigma'_1 - 1}{\sigma'_1 + 1} \right| \quad (29)$$

Siendo además:



$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{1 + \sigma_1'} \sigma_1' \quad (30)$$

Por otro lado el esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  mediante la ecuación (15) resulta:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \frac{\tau_{\alpha}(1 + \sigma_1')}{(\sigma_1')^{1/2}} \quad (31)$$

Reemplazando dicho valor en (30) queda:

$$\sigma_{\alpha}(1 + \sigma_1') = \sigma_1 + \sigma_1' \left| \sigma_1 - \frac{\tau_{\alpha}(1 + \sigma_1')}{(\sigma_1')^{1/2}} \right| \quad (32)$$

De donde:

$$\sigma_1 = \sigma_{\alpha} + \tau_{\alpha} (\sigma_1')^{1/2} \quad (33)$$

Sustituyendo (28) en (33) obtenemos:

$$\sigma_1 = \sigma_{\alpha} + \tau_{\alpha} \left| \tau_{\alpha}' + (1 + \tau_{\alpha}')^{1/2} \right| \quad (34)$$

Es decir:

$$\sigma_1 = \sigma_{\alpha} + \tau_{\alpha} \left| \tau_{\alpha}' + \tau_{\alpha}' (1 + \tau_{\alpha}')^{1/2} \right| \quad (35)$$

Igualmente

$$\sigma_3 = \sigma_{\alpha} + \tau_{\alpha} \left| \tau_{\alpha}' - \tau_{\alpha}' (1 + \tau_{\alpha}')^{1/2} \right| \quad (36)$$

Siendo la diferencia entre ambas ecuaciones:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 2 \tau_{\alpha} (1 + \tau_{\alpha}')^{1/2} \quad (37)$$

Elevando (28) al cuadrado:

$$\sigma_1' = (\tau_{\alpha}')^2 + 2 \tau_{\alpha}' \left| 1 + (\tau_{\alpha}')^2 \right|^{1/2} + \left| 1 + (\tau_{\alpha}')^2 \right| \quad (38)$$

Así

$$\sigma'_1 = \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = 1 + 2 (\tau'_d)^2 + 2 \tau'_d \left| 1 + (\tau'_d)^2 \right|^{1/2} \quad (39)$$

Reemplazando  $\left( m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$  de la ecuación (1) en (21)

$$\tan \alpha = \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)^{1/2} = \left| 1 + \frac{m \sigma_c}{2(\sigma_1 - \sigma_3)} \right|^{1/2} \quad (40)$$

Por lo tanto la ecuación (39) se convierte:

$$1 + \frac{m \sigma_c}{2(\sigma_1 - \sigma_3)} = 1 + 2(\tau'_d)^2 + 2\tau'_d \left| 1 + (\tau'_d)^2 \right|^{1/2} \quad (41)$$

Finalmente se conoce de acuerdo a (37) que  $(\sigma_1 - \sigma_3) = 2\tau'_d (1 + \tau'^2_d)^{1/2}$ , por lo tanto la ecuación anterior se transforma al realizar las simplificaciones respectivas, en la siguiente forma:

$$\frac{m \sigma_c}{8} = \tau'_d \tau'_{d'} \left| \tau'_{d'} \sqrt{1 + \tau'^2_d} + (1 + \tau'^2_d) \right| \quad (42)$$

#### Solución de la ecuación diferencial

La ecuación diferencial indicada en (42), por simple comodidad la expresamos de la manera siguiente:

$$\frac{m \sigma_c}{8} = y \cdot y' \left| y' \sqrt{1 + y'^2} + (1 + y'^2) \right| \quad (43)$$

Siendo lógicamente  $y = \tau'_d$ ,  $y' = \frac{dy}{dx} = \tau'_{d'}$ ,  $x = \sigma_\alpha$

Al estudiar dicha ecuación, se aprecia que corresponde a la forma<sup>5</sup>:

$$F(y, y') = 0 \quad (44)$$

Introduciendo un nuevo parámetro  $\beta$ , y reemplazando en (44) las ecuaciones  $y = \psi(\beta)$ ,  $y' = \theta(\beta)$ , se tiene:

$$F(\psi(\beta), \theta(\beta)) = 0 \quad (45)$$

Además:

$$y' = \left( \frac{dy}{dx} \right) = \psi'(\beta) \frac{d\beta}{dx} \quad \therefore \quad dy = \psi'(\beta) d\beta \quad (46)$$

Por otro lado:

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\psi'(\beta) d\beta}{\theta(\beta)} \quad (47)$$

Integrando la ecuación anterior resulta:

$$\sigma_{\alpha} = x = \int \frac{\psi'(\beta)}{\theta(\beta)} d\beta + C \quad (48)$$

Siendo C una constante de integración.

Consideremos que  $y' = \theta(\beta) = \tan \beta$  (pendiente de la envolvente) entonces la ecuación (43) se transforma:

$$y = \frac{m \sigma_c}{8} \left( \frac{1}{\tan \beta (\tan \beta \sec \beta + \sec^2 \beta)} \right) \quad (49)$$

Llevando a cabo las simplificaciones trigonométricas, queda entonces:

$$y = \frac{m \sigma_c}{8} \left( \frac{1 - \operatorname{Sen} \beta}{\tan \beta} \right) = \sigma_{\alpha} \quad (50)$$

Es decir:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{m \sigma_c}{8} \left( \frac{(1 - \operatorname{Sen} \beta) (1 - \operatorname{Sen}^2 \beta)^{1/2}}{\operatorname{Sen} \beta} \right) \quad (51)$$

Igualmente se sabe que  $\frac{dy}{d\beta} = \psi'(\beta)$ , por tanto según (50) se tiene:

$$\frac{dy}{d\beta} = - \frac{m \sigma_c}{8} \left( \frac{\cos \beta \tan \beta + (1 - \operatorname{Sen} \beta) \tan \beta}{\tan^2 \beta} \right) \quad (52)$$

Simplificando queda:

$$\psi'(\beta) = - \frac{m \sigma_c}{8} \left( \frac{1}{\operatorname{Sen}^2 \beta} - \operatorname{Sen} \beta \right) \quad (53)$$

Así, de acuerdo a (48) se aprecia:

$$\sigma_{\alpha} = x = - \frac{m \sigma_c}{8} \int \left( \frac{1}{\operatorname{Sen}^2 \beta} - \operatorname{Sen} \beta \right) \frac{d\beta}{\tan \beta} + C \quad (54)$$

Al integrar (54), obtenemos:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{m \sigma_c}{8} \left[ \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 \beta} + \operatorname{sen} \beta \right] + C \quad (55)$$

Condiciones de Borde:

Utilizando las ecuaciones (26) y (14), y al mismo tiempo tomando en cuenta el caso particular cuando  $\sigma_3 \rightarrow -\frac{\sigma_c}{m} s$ , se tendrá por tanto:

$$\sigma_{\alpha}' = \left( \frac{d\tau_{\alpha}}{d\sigma_{\alpha}} \right) = \tan \beta = \frac{(\sigma_{\alpha}' - 1)}{2(\sigma_{\alpha}')^{1/2}}$$

$$\tan \beta = \frac{m}{4 \left[ \left( m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right) + \frac{m}{2} \left( m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2} \right]} \quad , \quad \omega = \beta = \pi/2$$

$$\lim_{\sigma_3 \rightarrow -\frac{\sigma_c}{m} s}$$

Iguamente:

$$\sigma_{\alpha}' = \sigma_3 + \frac{2 \sigma_c \left( m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)}{m + 4 \left( m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2}} = \sigma_3 = -\frac{\sigma_c}{m} s$$

$$\lim_{\sigma_3 \rightarrow -\frac{\sigma_c}{m} s}$$

Por lo tanto si se reemplaza  $\sigma_{\alpha} = -\frac{\sigma_c}{m} s$  y  $\beta = \pi/2$  en (55) obtendremos la constante de integración (C), es decir:

$$-\frac{\sigma_c}{m} s = \frac{m \sigma_c}{8} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) + C \quad (56)$$

$$C = -\frac{3m}{16} \sigma_c - \frac{\sigma_c}{m} s = -\sigma_c \left( \frac{3m}{16} + \frac{s}{m} \right) \quad (57)$$

Quedando finalmente la ecuación (55) expresada de la forma siguiente:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{m \sigma_c}{8} \left[ \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 \beta} + \operatorname{sen} \beta \right] - \sigma_c \left( \frac{3m}{16} + \frac{s}{m} \right) \quad (58)$$

El paso siguiente es reemplazar el valor de  $\operatorname{sen} \beta$  en la ecuación (51), con la finalidad de obtener la resistencia al corte  $\tau_{\alpha} = f(\sigma_{\alpha}, \sigma_3, m, s)$ . Lo anterior indica que será necesario transformar la ecuación (56), como a continuación se describe:

$$\text{Sen}^3 \beta - k \text{ Sen}^2 \beta + \frac{1}{2} = 0 \quad (59)$$

Donde:

$$k = \frac{E}{\pi^2} \left( m \frac{v_0}{v_c} + \pi \right) \left| + \frac{3}{2} \right. \quad (60)$$

Siendo la solución de la ecuación cúbica, la siguiente:

$$\text{Sen} \beta = \frac{k}{3} \left| 2 \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left( 1 - \frac{27}{4k^3} \right) + \frac{4\pi}{3} \right\} + 1 \right| \quad (61)$$

Para el caso particular que  $\frac{27}{4k^3} \rightarrow 0$ , por supuesto  $\text{Sen} \beta \rightarrow 0$ ; lo cual indica que se requerirá de mucha precisión en la calculadora.

Esto puede obviarse considerando en la ecuación (59) que  $\text{Sen}^3 \beta$  es un infinitésimo de orden superior, y puesto que el valor de  $k$  es muy grande, entonces  $k \text{ Sen}^2 \beta \gg \text{Sen}^3 \beta$ .

Es decir:

$$\frac{1}{2} - k \text{ Sen}^2 \beta = 0 \quad (62)$$

$$\text{Sen} \beta = \left( \frac{1}{2k} \right)^{1/2} \quad (63)$$

Transformándose por lo tanto la ecuación (51) en la siguiente forma reducida:

$$\frac{v_D}{v_c} \sim \frac{\pi}{8} (2k)^{1/2} \quad (64)$$

#### APLICACION PRACTICA

Ejemplo N° 1

Roca: Granito

**Características:** Macizo de muy buena calidad, ligeramente meteorizado, con diaclasas espaciadas a  $\pm 2$  m. Con estas características, de acuerdo a la tabla N° 1, se aprecia:

$$m = 2,5; \quad s = 0,004, \quad \frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,002 \quad A = 0,603; \quad B = 0,707$$

$$\text{Igualmente consideramos que } \frac{\sigma_a}{\sigma_c} = 2$$

A) Solución exacta:

A través de las ecuaciones (60) y (61) se tiene:

$$K = \left| \frac{8}{6,25} (5+0,04) + \frac{3}{2} \right| = 7,905$$

$$\text{Sen } \beta = \frac{7,905}{3} - 2 \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left( 1 - \frac{27}{4 \cdot 493,976} \right) + 240^\circ \right\} + 1 = 0,2557$$

Por tanto de acuerdo a (51), obtendremos:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_c} = 0,8793 \text{ (Método A)}$$

B) Aplicando el método aproximado propuesto por Hoek y Brown, en base a lo indicado en la tabla N° 1, resulta:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_c} = A \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_c} - \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right)^B = 0,603 (2 + 0,002)^{0,707} = 0,985 \text{ (Método B)}$$

Ejemplo N° 2

Hcca: Anfibolita

**Características:** Macizo de calidad muy pobre altamente diaclasado y meteorizado, diaclasas < 50 mm.

Según la tabla N° 1, se tiene:

$$m = 0,025, \quad s = 0, \quad \frac{\sigma_t}{\sigma_c} = 0, \quad A = 0,078 \text{ y } B = 0,556$$

Tomando en cuenta que  $\frac{\sigma_a}{\sigma_c} = 10$ , resulta:

$$K = \left| \frac{80}{0,025} + \frac{3}{2} \right| = 3.201,50$$

Puesto que al sustituir el valor de k en la ecuación (61),  $\text{Sen } \delta \rightarrow 0$ , se utilizará por tanto la expresión (64), es decir:

$$\frac{\tau_u}{\tau_c} = \frac{m}{8}(2k)^{1/2} = \frac{0,025}{8}(6,403)^{1/2} = 0,250 \text{ (solución exacta)}$$

De acuerdo a Hoek y Brown, obtenemos:

$$\frac{\tau_u}{\tau_c} = 0,078(10)^{0,556} = 0,281 \text{ (Método B)}$$

#### CONCLUSIONES

Utilizando la excelente contribución llevada a cabo por Hoek y Brown bajo la nueva hipótesis de rotura que relaciona los esfuerzos principales en el instante de la falla mediante una expresión cuadrática, y tomando en cuenta al mismo tiempo el método analítico para evaluar la resistencia al corte en rocas, desarrollado en este trabajo, es lógico concluir que se abre un nuevo campo de investigación a través de dicha envolvente de falla por cizallamiento en todo lo concerniente a estabilidad de taludes, soporte de galerías, así como nuevos métodos de cálculo en fundaciones en roca de calidad pobre, y en el diseño de anclajes en macizos rocosos inestables, como también otros problemas que generalmente se presentan en el campo de la geotecnia.

Por otro lado dicha fórmula reemplaza la envolvente de falla de Mohr-Coulomb, la cual se ha estado utilizando en una forma aproximada, a sabiendas que la verdadera ecuación que gobierna la resistencia al corte en las rocas no es una recta.

Por último quizás el problema más difícil, se le presenta al Ingeniero Geólogo, en el momento de escoger los verdaderos valores de  $m$  y  $s$ , los cuales dependen de las propiedades del macizo.

#### REFERENCIAS

- <1> HOEK, E y BROWN, T "Empirical Strength Criterion for Rocks Masses", Journal of the Geotechnical Engineering Division, Vol. 106, N° 679, 1013-1033 (1980)
- <2> GRIFFITH, A "The Phenomena of Rupture and flow in solids", Phil. Trans. Royal Society, Series A, Vol. 221. 163-198 (1921)
- <3> BALMER G. "A General Analytical Solution for Mohr's Envelope" American Society of Testing Materials. Vol. 152, 1260-1275 (1952)
- <4> NAVARRO, F. y RIOS S. "Curso Preliminar de Análisis Matemático", Editorial Dossat, S.A., 626 (1958)

- <5> BLSGCLTS, L. "Differential Equations and the Calculus of Variations", Moscow, Mir Publishers, 440 (1980)

**AGRADECIMIENTOS**

El autor quiere expresar sus más sinceros agradecimientos a los profesores Gerardo Defives, Florencio Plachco y Lucas Rojas, del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes, por la valiosa colaboración prestada durante la elaboración del mismo.

Igualmente reitero mis testimonios de gratitud al Ing. Miguel de Luca, de la Empresa EPICA.