TRANSFERENCIA SIMULTANEA DE CALOR Y MASA UNIDIRECCIONAL Y CON CONDICIONES DE CONTORNO NO—SIMETRICAS DE GENEROS 1—3

Armando Monsalve y F. Plachco
Escuela de Ingeniería Química
Facultad de Ingeniería
Universidad de Los Andes
Mérida - Venezuela

RESUMEN

En el presente trabajo se resuelve formalmente la transferencia simultánea de calor y masa unidireccional con condiciones de contorno de géneros 1—3 en la superficie interna y de géneros 3—3, simétricas, en la superficie externa.

Artículo CIFI-102. Ciencia e Ingeniería N° 16 (1979)

INTRODUCCION

En el presente trabajo se muestra la resolución formal del sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) que dan cuenta de la transferencia de calor y masa simultánea en cuerpos donde ésta tiene lugar unidireccionalmente (placa $-\infty$, cilindro $-\infty$, esfera), con condiciones de contorno no simétricas en una cara de géneros 1–3 y simétricas en la otra cara de géneros 3–3.

Sobre transferencia de calor y masa existe extensa bibliografía y hasta el año 1963 se encuentra reflejada en [1]. En esta obra se encuentra un resumen ad-hoc de Termodinámica Irreversible, deducción de las EDP que rigen el proceso en diversas situaciones físicas, muestran la resolución analítica de un número considerable de casos e inclusive se encuentran graficados algunos de ellos.

De [1] se infiere que en los problemas con condiciones de contorno simétricas es ventajoso hallar la solución analítica por el método de D'Alambert. Este permite desdoblar un sistema de dos EDP dependientes en dos EDP independientes. En general, se considera que problemas con condiciones de contorno no–simétricas no son susceptibles de desdoblar en EDP independientes, por consiguiente, la solución se busca vía transformadas, generalmente la de Laplace, lo cual implica un trabajo engorroso de inversión.

Aquí se expone una forma de abordar problemas con condiciones de contorno no-simétricas en una de las caras, que en esencia consiste en simetrizar por medio de una función desconocida a priori. Esta se halla a posteriori resolviendo una ecuación integral del tipo de convolución.

Las EDP y las condiciones iniciales y de contorno que representan el fenómeno antes descrito son:

$$A\frac{\partial \theta_1}{\partial F_o} + B\frac{\partial \theta_2}{\partial F_o} = \nabla^2 \theta_1 \; ; \quad a \leqslant r \leqslant 1 \; ; \quad F_o \geqslant o \qquad (1)$$

$$C\frac{\partial \theta_1}{\partial F_o} + D\frac{\partial \theta_2}{\partial F_o} = \nabla^2 \theta_2 \; ; \quad a \leqslant r \leqslant 1 \; ; \quad F_o \geqslant o \qquad (2)$$

$$\theta_i = f_i(r) \qquad ; \quad a \leqslant r \leqslant 1 \quad ; \quad F_o = o \quad ; \quad i = 1,2 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial r} = G_1(F_o) \qquad : \quad r = a \quad ; \quad F_o \geqslant o \qquad (4)$$

$$\theta_2 + H.\frac{\partial \theta_2}{\partial r} = G_2(F_o) \; ; \quad r = a \quad ; \quad F_o \geqslant o \qquad (5)$$

$$\theta_i + E.\frac{\partial \theta_i}{\partial r} = F_i(F_o) \; ; \quad r = 1 \quad ; \quad F_o \geqslant o \quad ; \quad i = 1,2 \qquad (6)$$

donde:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^\Gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^\Gamma \frac{\partial}{\partial r} \right) \qquad \Gamma = \begin{cases} 0; \text{placa} - \infty \\ 1; \text{cilindro} - \infty \\ 2; \text{esfera} \end{cases}$$

$a = 0$, para placa $- \infty$

$o < a < 1$; para cilindro $- \infty$ y esfera

El sistema (1–6) es suceptible de ser desdoblado en dos, por el método de D'Alambet, pero para ello es necesario primeramente si - metrizar las condiciones (4) y (5). Esto se puede lograr reemplazando la (4) por

$$\theta_1 + H.\frac{\partial \theta_1}{\partial r} = g_1(F_o) \; ; \quad r = a \quad ; \quad F_o \geqslant o \qquad (7)$$

donde g_1 (Fo) es una función desconocida y que posteriormente se hallará.

Si se multiplica la EDP (2) por ν y se suma a la (1) se tiene

$$(A + \nu.C).\frac{\partial}{\partial F_o}\left[\theta_1 + \left(\frac{B + \nu.D}{A + \nu.C} \right) \theta_2 \right] = \nabla^2[\theta_1 + \nu.\theta_2] \qquad (8)$$

Si se exige que las funciones entre corchetes a ambos lados de la EDP (8) sean iguales, entonces se tiene

$$\nu_i = ((D - A) \pm \sqrt{(D-A)^2 + 4.B.C}) / (2C) \quad ; \quad i = 1,2 \qquad (9)$$

En base a (8) y (9) se puede definir:

$$Z_i = \theta_1 + \nu_i.\theta_2 \qquad ; \qquad i = 1,2 \qquad (10)$$

de donde se tiene

$$\theta_1 = (\nu_1.Z_2 - \nu_2.Z_1)/(\nu_1 - \nu_2) \qquad ; \qquad \theta_2 = (Z_1 - Z_2)/(\nu_1 - \nu_2) \qquad (11)$$

Si se llevan las expresiones (11) al sistema (1–6) (habiendo reemplazado (4) por (7)), se multiplica las expresiones de θ_2 por ν_i, i = 1,2 y se suman a sus homónimas, se obtiene

$$\nabla^2 Z_i = A_i.\frac{\partial Z_i}{\partial F_o} \qquad ; \; a \leqslant r \leqslant 1 \; ; \; F_o \geqslant o \qquad (12)$$

$$Z_i = h_i\ (r) \qquad ; \; a \leqslant r \leqslant 1 \; ; \; F_o = o \qquad (13)$$

$$Z_i + H.\frac{\partial\ Z_i}{\partial\ r} = g_1(F_o) + \nu_i.\ G_2(F_o); r = a\ F_o \geqslant o \qquad (14)$$

$$Z_i + E.\frac{\partial\ Z_i}{\partial\ r} = H_i\ (F_o)\ ;\ r = 1 \qquad ;\ F_o \geqslant o \qquad (15)$$

donde

$i = 1,2$

$A_i = A + \nu_i.C$

$h_i\ (r) = f_1(r) + \nu_i.\ f_2(r)$

$H_i\ (F_o) = F_1(F_o) + \nu_i.\ F_2\ (F_o)$

La solución de (12 — 15) se halla por medio de la transformada generalizada finita de Fourier [2 — 4], cuyo nucleo de transformación es

$$K\,(r\,,\,\lambda) = r^{\,\Gamma}.\ \phi\,(r\,,\,\lambda) \tag{16}$$

La función $\phi\,(\gamma, \lambda)$ esta definida por

$$\nabla^2\,\phi\,(r,\lambda_m) + \lambda_m^2 .\ \phi\,(r\,,\,\lambda_m) = o \qquad ; \quad a \leqslant r \leqslant 1 \tag{17}$$

$$\phi\,(r\,,\,\lambda_m) + H.\ \frac{\partial\ \phi\,(\,r\,,\,\lambda_m)}{\partial\,r} = o \qquad ; \quad r = a \tag{18}$$

$$\phi\,(r,\lambda_m) + E.\ \frac{\partial\ \phi\,(\,r,\,\lambda_m)}{\partial\ r} = o \qquad ; \quad r = 1 \tag{19}$$

La solución de (17 — 19) se escribe:

$$\phi\,(\,r,\lambda_m) = \sin\,(\lambda_m.\,r) - H.\lambda_m.\ \cos\,(\gamma_m.\,r) \qquad ; \ \Gamma = o \tag{20}$$

$$\phi\,(r,\lambda_m) = J_o(\lambda_m.\,r) - \frac{(H.\lambda_m.J_1(\lambda_m.a) - J_o(\lambda_m.a))}{(H.\,\lambda_m.\,Y1\ (\lambda_m.a) - Y_o(\lambda_m.a))}\ Y_o(\lambda_m.\,r); \tag{21}$$

$\Gamma = 1$

$$\phi\,(\,r,\lambda_m) = \frac{1}{\lambda_m.\,r}\,[\ \sin\,(\lambda_m.r) - \left(\frac{(H-a^2.\,\lambda_m).\,tg(\lambda_m a) - H.\lambda_m.a}{(H-a^2.\lambda_m).+H.\lambda_m.a.\ tg(a.\lambda_m)}\right)].$$

$\cos\,(\lambda_m.r);\ \Gamma = 2$ (22)

Los valores propios λ_m estan dados por las siguientes ecuaciones trascendentales:

$$tg\,(\lambda_m) = \frac{(\ H - E).\ \lambda_m}{(\ 1 + E.H.\ \lambda_m^2\ )} \qquad ; \quad m = 1,2,..\ \ ;\Gamma{=}o \tag{23}$$

$$\frac{J_o(\lambda_m) - E.\lambda_m.J_1(\lambda_m)}{Y_o(\lambda_m) - E.\lambda_m.Y_1(\lambda_m)} = \frac{J_o(\lambda_m.a) - H.\lambda_m.J_1(\lambda_m.a)}{Y_o(\lambda_m.a) - H.\lambda_m.Y_1(\lambda_m.a)} \quad ; \Gamma = 1 \quad (24)$$

$$tg(\lambda_m) = \frac{(1-E)[(H-a^2.\lambda_m).tg(\lambda_m.a) - H.\lambda_m.a] - E.\lambda_m[(H-a^2\lambda_m) + H.a.\lambda_m.tg(\lambda_m.a)]}{(1-E)[(H-a^2.\lambda_m). + H.a.\lambda_m.tg(\lambda_m.a)] + E.\lambda_m[(H-a^2.\lambda_m).tg(a.\lambda_m) - H.a.\lambda_m]}$$

$$; \Gamma = 2 \quad (25)$$

Si se aplica la transformada generalizada finita de Fourier a (12) se obtiene:

$$A_i . \frac{\partial \bar{Z}_i}{\partial F_o} (\lambda_m, F_o) + \lambda_m^2 . \bar{Z}_i(\lambda_m, F_o) = A_i . \psi_i(\lambda_m, F_o) \qquad (26)$$

donde

$$\bar{Z}_i(\lambda_m, F_o) = \int_a^1 K(r, \lambda_m).Z_i(r, F_o).dr$$

$$\psi_i(\lambda_m, F_o) = \Omega_i(\lambda_m, F_o) - a^{\Gamma} \phi(a, \lambda_m).g_1(F_o)/(H.A_i)$$

$$\Omega_i(\lambda_m, F_o) = \phi(1, \lambda_m).H_i(F_o)/(A_i.E) - a^{\Gamma} \phi(a, \lambda_m).\nu_i.G_2(F_o)/(H.A_i)$$

La solución de (26) según [5], es:

$$\bar{Z}_i(\lambda_m, F_o) = \int_o^{F_o} \psi_i(\lambda_m, F_o).e^{-\lambda_m^2 (F_o - \tau)/A_i}.d\tau + \\ + \bar{h}_i(\lambda_m).e^{-\lambda_m^2 . F_o/A_i} \qquad (27)$$

donde

$$\bar{h}_i(\lambda_m) = \int_a^1 h_i(r).K(r, \lambda_m).dr$$

La función inversa de (27) se escribe

$$Z_i\ (r, F_o) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi\ (r,\lambda_m)}{\gamma\ (\lambda_m)}\ [\ \bar{h}_i(\lambda_m).\ e^{-\lambda_m . F_o/A_i} +$$

$$+ \int_0^{F_o} \psi_i(\lambda_m, F_o).\ e^{-\lambda_m^2 . (F_o - \tau)/A_i}\ d\tau\ ] \qquad (28)$$

siendo

$$\gamma\ (\lambda_m) = \int_a^1 r^{\Gamma} .\ \phi^2\ (r,\lambda_m).\ dr$$

La expresión (28) es la solución de (12 -15), si se lleva esta a (11) se puede escribir

$$\phi_1(r,F_o) = \frac{1}{(\nu_1 - \nu_2)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi(r,\lambda_m)}{\gamma(\lambda_m)} \Big\{ \nu_1 . \bar{h}_2(\lambda_m). e^{-\lambda_m^2 . F_o/A_2}$$

$$- \nu_2 . \bar{h}_1(\lambda_m). e^{-\lambda_m^2 . F_o/A_1} +$$

$$+ \int_0^{F_o} [\nu_1 . \psi_2(\lambda_m,\tau)\ e^{-\lambda_m^2 (F_o - \tau)/A_2} - \nu_2 . \psi_1(\lambda_m;\tau)$$

$$e^{-\lambda_m^2 . (F_o - \tau)/A_1}]\ d\ \tau \Big\} \qquad (29)$$

$$\phi_2(r,F_o) = \frac{1}{(\nu_1 - \nu_2)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi(r,\lambda_m)}{\gamma\ (\lambda_m)} \Big\{ \bar{h}_1(\lambda_m).\ e^{-\lambda_m^2 . F_o/A_1}$$

$$- \bar{h}_2(\lambda_m).\ e^{-\lambda_m^2 .\ F_o/A_2} +$$

$$+ \int_0^{F_o} [\psi_1(\lambda_m,\tau).\ e^{-\lambda_m^2.(F_o-\tau)/A_1} - \psi_2(\lambda_m,\tau).\ e^{-\lambda_m^2(F_o-\tau)/A_2}]\, d\tau \Big\} \tag{30}$$

Las expresiones (29) y (30) son soluciones del problema (1–6) a menos de una función desconocida, para hallar a esta se introduce $\partial\Theta_1(x,F_o)/\partial x,\ x = a$ en (4), obteniéndose

$$G_1(F_o) = S_o(F_o) + \int_0^{F_o} S_1(F_o-\tau).\ g_1(\tau).\ d\tau \tag{31}$$

donde

$$S_o(F_o) = \frac{1}{(\nu_1-\nu_2)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi''(r = a,\lambda_m)}{\gamma(\lambda_m)} \Big\{ \nu_1.\bar{h}_2(\lambda_m).\ e^{-\lambda_m^2.F_o/A_2}$$

$$-\nu_2.\bar{h}_1(\lambda_m).\ e^{-\lambda_m^2.F_o/A_1} +$$

$$+ \int_0^{F_o} [\ \nu_1.\Omega_2(\lambda_m.F_o).\ e^{-\lambda_m^2.(F_o-\tau)/A_2} - \nu_2.\Omega_1(\lambda_m,\tau).$$

$$e^{-\lambda_m^2.(F_o-\tau)/A_1}\ ].\ d\tau \Big\}$$

$$S_1(F_o-\tau) = \frac{1}{(\nu_1-\nu_2)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{\Gamma}.\phi'\ (r=a,\lambda_m)}{H.\gamma(\lambda_m)}\ \phi(r=a,\lambda_m).\ [\ \frac{\nu_2}{A_1}$$

$$e^{-\lambda_m^2.(F_o-\tau)/A_1} - \frac{\nu_1}{A_2}\, e^{-\lambda_m^2.(F_o-\tau)/A_2}]$$

La ecuación integral (31) es del tipo de convolución y por lo tanto facilmente resoluble por medio de la transformada de Laplace. Luego de transformar se tiene:

$$\tilde{g}_1(s) = (\tilde{G}_1(s) - \tilde{S}_o(s))/\tilde{S}_1(s) \tag{32}$$

La solución de (32) es

$$g_1(F_o) = \int_o^{F_o} [G_1(F_o - \tau) - S_o(F_o - \tau)] . \eta(\tau) . d\tau \qquad (33)$$

donde

$$\eta(\tau) = (\nu_1 \cdot \nu_2) . \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{p_j \cdot \tau}}{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{\Gamma} . \phi' (r = a, \lambda_m) . \phi(a, \lambda_m)}{H . \gamma(\lambda_m)} \left(\frac{A_2 . \nu_1}{(A_2 p_j + \lambda_m)^2} - \frac{A_1 . \nu_2}{(A_1 p_j + \lambda_m^2)^2} \right)}$$

y los polos, p_j, están dados por

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{\Gamma} . \phi' (r = a, \lambda_m) . \phi(a, \lambda_m)}{H . \gamma(\lambda_m)} \left[\frac{\nu_2}{(A_1 . p_j + \lambda_m^2)} - \frac{\nu_1}{(A_2 . p_j + \lambda_m^2)} \right] = o \qquad (34)$$

La solución del problema original (1–6) esta dada por las expresiones (29) y (30) si en $\psi_i(r, \lambda_m), i = 1,2$ se reemplaza $g_1(F_o)$ por su formula (33).

Es de mencionar que las asíntotas de la expresión (34) se encuentran en

$$p = - \lambda_m^2 / A_1 \qquad \text{y} \qquad p = - \lambda_m^2 / A_2$$

y que por lo general para valores de p del orden de 1000 las raíces p_j se encuentran muy próximas a las asíntotas, motivo por el cual, es necesario calcular con alta precisión los valores propios λ_m.

BIBLIOGRAFIA CITADA

1.– Lykov, A.V., Mikhailov, Yu. A., Theory of Heat and Mass Transfer, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965.

2.– Koshlyakov, N.S., Smirnov, M.M., Gliner, E.B., Differential Equations of Mathematical Physics, North – Holland, Amsterdam, 1964.

3.– Sneddon, I,N., Fourier Transforms, McGraw – Hill, N. Y., 1951.

4.– Churchill, R.V., Operational Mathematics, McGraw – Hill, N. Y., 1958.

5.– Kamke, E., Differentialgleichungen lösungsmethoden und lösungen, N.Y., Chelses 1971.