# UN NUEVO PROCEDIMIENTO PARA DETERMINAR DIRECTAMENTE LA VELOCIDAD Y DIAMETRO DE SOLIDOS EN LIQUIDOS

*Jorge Luis Grosso V.*
*Director*
*Escuela de Ingeniería Química*
*Universidad de Los Andes*
*Mérida - Venezuela*

## RESUMEN

En este artículo se presenta una nueva forma de calcular las velocidades terminales y diámetros de sólidos en líquidos sin necesidad de recurrir al sistema de prueba y error o a cálculos complicados hasta ahora utilizados.

## INTRODUCCION

*El desplazamiento de las partículas de un sólido a través de un líquido se efectúa de arriba hacia abajo o viceversa, según sea la densidad relativa del sólido con respecto al fluido y constituye la base de un procedimiento para la separación de partículas según sus densidades y velocidades de precipitación en el seno de los fluidos, operación que se conoce con el nombre de "clasificación" o "separación hidráulica"; ejemplo de ello es la separación de minerales por elutriación, sedimentación de lodos, separación de partículas por centrifugación (ciclones), etc. (1).*

*Estas velocidades dependen de las propiedades del sólido (densidad, tamaño y forma) así como de la clase de fluido.*

*La determinación de las velocidades de sedimentación se ha deducido basada en el movimiento o caída libre de cuerpos bajo la influencia de una fuerza externa (centrífuga o de gravedad) y se rige por la Ley de Newton (2), condensada en la siguiente expresión:*

$$V_t = \sqrt{\frac{4\, g\, D_p\, (\rho_s - \rho)}{3\, C_D\, \rho}} \qquad (1)$$

*La velocidad no se puede obtener directamente, pues $C_D$ depende del número de Reynolds y éste es función de la velocidad y diámetro de la partícula.*

*La expresión de Newton se simplifica si el flujo es reptante (Reynolds menor de 0.1), región en la cual*

$$C_D = \frac{24}{Re} \qquad (2)$$

*Reduciéndose la ecuación de velocidad terminal a la Ley de Stokes:*

$$V_t = \frac{(\rho_s - \rho)}{18\mu}\, g\, D_p^2 \qquad (3)$$

*Cuando $D_p$, $V_t$, $\rho$ no se conocen, la resolución de la ecuación (1) se complica y se debe recurrir al tanteo. Sin embargo, éste puede evitarse parcialmente hasta el momento mediante la gráfica* *de Rouse (3) o bien transformando la ecuación (1) a una forma logarítmica (4) del tipo:*

$$\log C_D = -2 \log Re + \log \frac{4 g D_p^3 \rho (\rho_s - \rho)}{3\mu^2} \qquad (4)$$

*que representa una línea recta con pendiente (−2) y que pasa a través del punto*

$$Re = 1 \text{ y } C_D = \frac{4}{3} g D_p^3 \frac{\rho (\rho_s - \rho)}{\mu^2}$$

*La intersección de esta línea con la curva característica que relaciona $C_D$ como una función de Re, es el valor deseado de la velocidad terminal. Como puede concluirse, no existe un método realmente directo.*

## CONSIDERACIONES TEORICAS

*Cuando una partícula de forma esférica de masa (m) y de densidad ($\rho_s$) cae en el seño de un fluido de densidad ($\rho$) bajo la influencia de la gravedad (figura 1)y adquiere una cierta velocidad, actúan sobre ella las siguientes fuerzas:*

—*fuerza externa debida a la gravedad* $F_E = \dfrac{mg}{g_c}$

—*fuerza de empuje* $F_B = \left(\dfrac{m}{\rho_s}\right) \rho \dfrac{g}{g_c}$

—*fuerza de arrastre* $F_D = \dfrac{C_D \, V_{SL}^2 \, A}{2 g_c}$

$$F_E - F_D - F_B = \frac{m}{g_c} \frac{dV}{dt} \qquad (5)$$

*Su velocidad aumenta hasta un lugar donde la fuerza de arrastre se equilibra exactamente mediante la fuerza de gravitación menos la fuerza de flotación o empuje; desde este punto en*

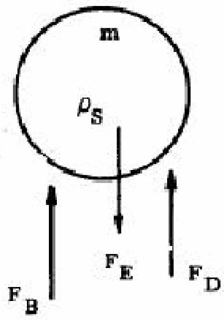


*Fig. N° 1*

*adelante, la velocidad de la partícula permanece constante y es conocida como "velocidad terminal".*

*Para esferas, el área (A) proyectada sobre un plano normal a la dirección del fluido es* $\pi D_p^2/4$ *y su masa* $\pi D_p^3 \rho_s/6$.

*Reemplazando estos valores en la ecuación (5), se obtiene:*

$$\frac{dV}{dt} = g\left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho}\right) - \frac{3}{4}\frac{C_D\,\rho}{D_p\,\rho_s} V_{SL}^2 \tag{6}$$

*Cuando alcanza la "velocidad terminal",* $dV/dt = 0$, *entonces*

$$C_D = \frac{4}{3}\frac{gD_p}{V_t^2}\frac{(\rho_s - \rho)}{\rho} \tag{7}$$

*Esta expresión permite calcular* $C_D$ *a partir de datos experimentales. Luego* $V_t$ *será igual a:*

$$V_t = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{(\rho_s - \rho)}{C_D\,\rho}\, g D_p} \tag{8}$$

*ecuación que se puede usar para calcular la velocidad terminal en flujo laminar, de transición o turbulento, si* $C_D$ *es evaluado. Pero el coeficiente de arrastre* ($C_D$) *es función de la velocidad, resultando una ecuación con dos incógnitas. La segunda ecuación sería un gráfico que relaciona* $C_D$ *con el número de*

*Reynolds (Re), implicando un proceso de prueba y error, ya que la velocidad aparece en la abscisa y ordenada, lo cual obliga a aproximaciones sucesivas.*

*Si el número de Reynolds (Re) se multiplica por la raíz cuadrada de $C_D$, se obtiene una expresión que no depende de la velocidad terminal.*

$$N_G = Re \sqrt{C_D} \qquad (9)$$

$$N_G = \left[\frac{D_p V_t \rho}{\mu}\right]\left[\frac{1}{V_t}\sqrt{\frac{4 D_p g}{3} \frac{(\rho_s - \rho)}{\rho}}\right] =$$

$$= \frac{D_p \rho}{\mu} \sqrt{\frac{4 D_p g}{3} \frac{(\rho_s - \rho)}{\rho}} \qquad (10)$$

*Si esta cantidad se grafica como una función de $1/\sqrt{C_D}$ como aparece en la figura 2, la velocidad terminal se obtiene directamente para un valor conocido de*

$$\left(\frac{4}{3} D_p g \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho}\right)\right)^{1/2}$$

*Obsérvese que el tratamiento matemático es similar al empleado por Karman para el cálculo de coeficiente de fricción de Darcy en tuberías cuando se desconoce la velocidad del fluido.*

## EJEMPLO ILUSTRATIVO

*Determinar la velocidad terminal de esferas de vidrio con una densidad de 2.62 gr $cm^{-3}$ y diámetro 0.01 cm, que se dejan caer en tetracloruro de carbono ($\rho$ = 1.59 gr $cm^{-3}$, $\mu$ = 9.58 milipoises) a 20° C.*

### Solución

*Se halla el valor de la abscisa:*

$$Re\sqrt{C_D} = \frac{D_p\,\rho}{\mu}\sqrt{\frac{4}{3}\,D_p\,g\,\frac{(\rho_s-\rho)}{\rho}}$$

$$= \frac{0.01 \times 1.59}{9.58 \times 10^{-3}}\sqrt{\frac{4}{3}\,\frac{0.01 \times 980 \times (2.62 - 1.59)}{1.59}}$$

$$= 1.659 \times 2.91 = 4.83$$

*Con el valor de* $Re\sqrt{C_D} = 4.83$, *se busca la intersección con la curva y se lee la ordenada* $1/\sqrt{C_D} = 0.203$.

$$1/\sqrt{C_D} = V_t/\sqrt{\frac{4}{3}\,D_p\,g\,\frac{(\rho_s-\rho)}{\rho}} = 0.203.$$

$$V_t = 2.91 \times 0.203 = 0.59 \text{ cm/seg}$$

*En algunos casos se desea conocer el tamaño de la partícula para lograr ciertas velocidades terminales, presentándose una situación que lleva a un proceso iterativo, el cual se elimina si* $C_D$ *se divide por* $Re$, *obteniéndose:*

$$\frac{C_D}{Re} = \frac{4}{3}\,\frac{g\,D_p}{V_t^2}\,\frac{(\rho_s-\rho)}{\rho} \bullet \frac{\mu}{D_p\,V_t\,\rho} = \frac{4}{3}\,\frac{\mu\,g}{V_t^3}\,\frac{(\rho_s-\rho)}{\rho^2}$$

*expresión independiente del tamaño de la partícula y que al graficarla contra* $Re$ *permite obtener directamente el valor de* $D_p$.

*De esta manera, se ahorra un tiempo considerable en los cálculos para determinar estos parámetros.*

## NOMENCLATURA

$A$ = *área proyectada del sólido en un plano perpendicular a la dirección de flujo*

$C_D$ = *coeficiente de arrastre (adimensional)*

$D_p$ = *diámetro de la partícula*

$g$ = *gravedad*

$g_c$ = *factor de conversión*

$m$ = *masa de la partícula*

$Re$ = *número de Reynolds*

$\rho_s$ = *densidad del sólido*

$\rho$ = *densidad del líquido*

$\mu$ = *viscosidad del líquido.*

## BIBLIOGRAFIA


(1) **Brown, George.** *Operaciones Básicas de la Ingeniería Química. Editorial Marín. Barcelona, 1965.*

(2) **Bird, R.; W. Steward.** *Fenómenos de Transporte. Editorial Reverté. Barcelona, 1973.*

(3) **Rouse, Hunter.** *Nomogram for Setting Velocity of Spheres. Report of Comm. on Sedimentation, 1936-37. Nat'l. Research Council. Washington, D. C., October 1937.*

(4) **Foust, A.; L. Wenzel.** *Principles of Unit Operations. John Wiley & Sons. New York, 1964.*