# OBTENCION DE LA FUNCION DE GREEN DEPENDIENTE DEL TIEMPO EN UN DOMINIO UNION DE DOS CUERPOS. METODO ALTERNANTE O DESARROLLO DE OPERADORES.

*Dr. Florencio P. Plachco*
*Escuela de Ingeniería Química*
*Facultad de Ingeniería*
*Universidad de Los Andes*
*Mérida - Venezuela.*

**RESUMEN**

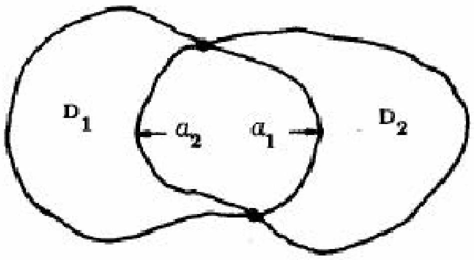
Se muestra la obtención de la función de Green de problemas dependientes del espacio - tiempo, en un dominio N-dimensional, resultado de la unión de dos dominios con función de Green conocida.

Las expresiones de la función de Green del problema se obtienen por el método alternante y se dan en forma de recurrencia y explícita. Se muestra que si el problema se plantea como uno de ecuaciones integrales y estas se resuelven por el procedimiento de expansión de operadores, se obtienen las soluciones explicitas antes mencionadas.

## INTRODUCCION

*El método alternante fue propuesto por Schwartz [1,2], para resolver problemas estacionarios y ofrece buena convergencia. Aquí se muestra que el método es suceptible de ser empleado en la resolución de problemas dependientes del espacio-tiempo, cuando el dominio N-dimensional del problema se puede considerar el resultado de la unión de dos dominios N-dimensionales de funciones de Green conocidas.*

*$\Gamma_i(r,t/\rho,\tau)$ es la función solución en $r$ (vector N-dimensional) en el tiempo $t$, de un impulso de Dirac aplicado en $\rho$ al tiempo $\tau$. Se supone que el dominio $D = D_1 \cup D_2$ es N-dimensional y que se conocen las funciones de Green $\Gamma_i(r,t/\rho,\tau)$, en los dominios $D_i$, $i=1,2$. En la obtención de $\Gamma_i(r,t/\rho,\tau)$ se supone que se satisface la condición $\Gamma_i(r,t/\rho,\tau)=o$, $r \in a_i$, $i=1,2$, donde $a_i$ son las superficies de contorno de los dominios $D_i$ que se encuentran dentro de $D$.*




*Si $G_i^j(r,t/r_o,o)$ es la función de Green del problema en el dominio $D_i$, al cabo de $j$ iteraciones, donde $r_o \in D_1 \cap D_2$, entonces las aproximaciones sucesivas se obtienen por el método alternante considerando que*

$$G_1^{j+1}(r,t/r_o,o) = G_2^j(r,t/r_o,o),\ r \in a_1 \ \text{y}\ G_2^{j+1}(r,t/r_o,o) =$$

$= G_1^{j+1}(r,t/r_o,o)$, $r \in a_2$ *iniciandose el esquema iterativo haciendo* $G_1^1(r,t/r_o,o) = \Gamma_1(r,t/r_o,o)$. *El proceso se prosigue hasta que se cumpla*

$$\sup_{r \in D_i} \left| G_i^{j+1}(r,t/r_o,o) - G_i^j(r,t/r_o,o) \right| \leq \epsilon,\ i = 1,2$$

donde $\epsilon$ es un valor positivo arbitrariamente pequeño.

SOLUCIONES DE RECURRENCIA. En el caso en que $\psi\,(r,t)$ se conoce sobre la superficie de contorno $a$, se tiene que la función solución de un problema esta dado por, [3,4]

$$\psi(r,t) = k \int_D \tilde{\psi}(r_o, o).\, \Gamma(r,t/r_o,o)\, dv_o -$$

$$- k \int_o^t dt_o \int_a \psi(r_o, t_o).\ \nabla_o . \Gamma(r,t/r_o,t_o)\, dS_o \qquad (1)$$

donde

$\tilde{\psi}(r_o, o)$: es la parte no-homogenea de la ecuación diferencial parcial, a $t = 0$

$k$: es una constante, que puede depender de la dimensión del espacio del dominio $D$ y además de la definición de la función de Green, $\Gamma$; su valor numérico es menor que uno.

$dv_m$ : es una diferencial de volumen N-dimensional, centrado sobre $r_m$, $m = 0, 1, 2...$

$dS_m$ : es un diferencial de superficie $(N-1)$-dimensional, centrado sobre $r_m, m = 0,1,2...$

$$\nabla_m \equiv \frac{\partial r_m}{\partial \vec{n}} \cdot \frac{\partial}{\partial r_m} \qquad ; \ m = 0,\ 1,\ 2...$$

En el caso considerado se tiene que $\tilde{\psi}\ (r_o, o)$ es el delta de Dirac, por lo cual la primera integral del miembro derecho de (1) es igual a la función de Green, $\Gamma_i(r,t/r_o,o)$ del dominio $D_i, i=1,2$.

Suponiendo que $G_1^1(r,t/r_o,o) = o,\ r \in a_1$, entonces de (1) se tiene

$$G_1^1(r,t/r_o,o) = \Gamma_1(r,t/r_o, o) \qquad (2.1)$$

Si ahora se considera que

$$G_2^1\ (r,t/r_o,o) = G_1^1(r,t/r_o, o) = \Gamma_1(r,t/r_o, o),\ r \in a_2$$

entonces por (1) se tiene

$$G_2^1(r,t/r_o, o) = \Gamma_2(r,t/r_o, o) - k. \int_o^t dt_1 \int_{a_2} \Gamma_1(r_1, t_1/r_o, o).$$

$$\nabla_1 . \Gamma_2(r,t/r_1,t_1)\ dS_1 \qquad (2.2)$$

*La segunda aproximación se obtiene considerando que*

$G_1^2(r,t/r_o,o) = G_2^1(r,t/r_o,o),\ r \in a_1$ *obteniendose*

$$G_1^2(r,t/r_o,o) = \Gamma_1(r,t/r_o,o) - k \int_o^t dt_2 \int_{a_1} G_2^1(r_2,t_2/r_o,o).$$
$$\nabla_2 .\ \Gamma_1(r,t/r_2,t_2).\ dS_2$$

*y suponiendo que* $G_2^2(r,t/r_o,o) = G_1^2(r,t/r_o,o),\ r \in a_2$ *se obtiene*

$$G_2^2(r,t/r_o,o) = \Gamma_2(r,t/r_o,o) - k \int_o^t dt_3 \int_{a_2} G_1^2(r_3,t_3/r_o,o).$$
$$\nabla_3 .\ \Gamma_2(r,t/r_3,t_3).\ dS_3 \qquad (3.2)$$

*Siguiendo este procedimiento se arriba a las siguientes expresiones de recurrencia :*

$$G_1^{j+1}(r,t/r_o,o) = \Gamma_1(r,t/r_o,o) - k. \int_o^t dt_{2j} \int_{a_1} G_2^j(r_{2j},t_{2j}/r,o).$$
$$\nabla_{2j} \Gamma_1(r,t/r_{2j},t_{2j}).\ dS_{2j} \qquad (4.1)$$
$$G_2^{j+1}(r,t/r_o,o) = \Gamma_2(r,t/r_o,o) - k. \int_o^t dt_{2j+1} \int_{a_2} G_1^{j+1}(r_{2j+1},t_{2j+1}/r,o).$$
$$\nabla_{2j+1} .\ \Gamma_2(r,t/r_{2j+1},t_{2j+1})\ dS_{2j+1} \qquad (4.2)$$

*Estas expresiones pueden ser especialmente útiles en el tratamiento por computadora.*

*SOLUCIONES EXPLICITAS :Aparte de las expresiones de recurrencia (4) es importante disponer de las expresiones explicitas de*

$$G_i^{j+1}(r,t/r_o,o),\ i = 1,2.$$

*La primera aproximación ya se encuentra en las expresiones (2), en forma explícita.*

*Si se introduce (2.2) en (3.1) se obtiene la segunda aproximacion en* $D_1$, *que se escribe*

$$G_1^2(r,t/r_o,o) = \Gamma_1(r,t/r_o,o) - k. \int_o^t dt_1 \int_{a_1} \Gamma_2(r_1,t_1/r_o,o)$$
$$\nabla_1 .\ \Gamma_1(r,t/r_1,t_1).\ dS_1 + k^2 \int_o^t dt_1 \int_1^t dt_2$$
$$\int_{a_1} dS_1 \int_{a_2} dS_2 .\ \Gamma_1(r_2,t_2/r_o,o).\ \nabla_2 \Gamma_2(r_1,t_1/r_2,t_2).$$
$$.\nabla_1 .\ \Gamma_1(r,t/r_1,t_1) \qquad (5.1)$$

*Introduciendo (5.1) en (3.2) se tiene la segunda aproximación en $D_2$, esto es*

$$G_2^2(r,t/r_o,o)=\Gamma_2(r,t/r_o,o)-k\int_o^t dt_1.\int_{a_1}\Gamma_1(r_1,t_1/r_o,o)$$

$$\nabla_1.\Gamma_2(r,t/r_1,t_1)\,dS_1+k^2\int_o^t dt_1\int_o^{t_1}dt_2\int_{a_2}dS_1\int_{a_1}dS_1.$$

$$\Gamma_2(r_2,t_2/r_o,o).\nabla_2.\Gamma_1(r_1,t_1/r_2,t_2).\nabla_1.\Gamma_2(r,t/r_1,t_1)-$$

$$-k^3\int_o^t dt_1\int_o^{t_1}dt_2\int_o^{t_2}dt_3\int_{a_2}dS_1\int_{a_1}dS_2\int_{a_2}dS_3.\Gamma_1(r_3,t_3/r_o,o).$$

$$\nabla_3.\Gamma_2(r_2,t_2/r_3,t_3).\nabla_2\,\Gamma_1(r_1,t_1/r_2,t_2).\nabla_1.\Gamma_2(r,t/r_1,t_1)$$

*Las aproximaciones en $D_i$, $i=1,2$, al cabo de $j+1$ iteraciones se pueden escribir en forma explícita, como*

$$G_1^{j+1}(r,t/r_o,o)=\Gamma_1(r,t/r_o,o)+\sum_{n=1}^{2j}(-k)^n\int_o^t dt_1\int_o^{t_1}dt_2\dots\int_o^{t_{n-1}}dt_n$$

$$\int_{a_1}dS_1\int_{a_2}dS_2\int_{a_1}dS_3\dots\int_{a_{\sigma(n)}}dS_n.\Gamma_{\sigma(n+1)}(r_n,t_n/r_o,o).$$

$$\prod_{i=1}^{n}\nabla_i.\Gamma_{\sigma(i)}(r_{i-1},t_{i-1}/r_i,t_i) \qquad (6.1)$$

$$G_2^{j+1}(r,t/r_o,o)=\Gamma_2(r,t/r_o,o)+\sum_{n=1}^{2j+1}(-k)^n\int_o^t dt_1\int_o^{t_1}dt_2\dots\int_o^{t_{n-1}}dt_n$$

$$\int_{a_2}dS_1\int_{a_1}dS_2\int_{a_2}dS_3\dots\int_{a_{\sigma(n+1)}}dS_n.\Gamma_{\sigma(n)}(r_n,t_n/r_o,o)$$

$$\prod_{i=1}^{n}\nabla_i.\Gamma_{\sigma(i+1)}(r_{i-1},t_{i-1}/r_i,t_i) \qquad (6.2)$$

*donde*

$$\sigma(n)=n-2\left[\frac{n-1}{2}\right] \quad ; \quad [X]: \text{parte entera de } X$$

$$r_{i-1}\equiv r \quad Si \quad i=1 \quad ; \quad t_{i-1}=t \quad Si \quad i=1$$

*Es necesario puntualizar que las expresiones (6) fueron obtenidas considerando que $r_o\in D_1\cap D_2$. En el caso que $r_o\in D_1-D_1\cap D_2$, las ecuaciones (6) son válidas teniendo presente que $\Gamma_2(r_m,t_m/r_o,o)=0$; si $r_o\in D_2-D_1\cap D_2$ se tiene que $\Gamma_1(r_m,t_m/r_o,o)=0$, $m=1,2,3,\dots$*

*SOLUCIONES POR EXPANSION DE OPERADORES.* Los resultados (6), obtenidos por el método alternante, se deducen si el problema se plantea como un sistema de ecuaciones integrales y se resuelve por desarrollo de operadores [5].

El sistema de ecuaciones integrales para el problema considerado se escribe

$$G_1(r,t/r_o,o) = \Gamma_1(r,t/r_o,o) - k.\int_o^t dt_1 . \int_{a_1} dS_1 . G_2(r_1,t_1/r_o,o). \nabla_1 . \Gamma_1(r,t/r_1,t_1) \qquad (7.1)$$

$$G_2(r,t/r_o,o) = \Gamma_2(r,t/r_o,o) - k.\int_o^t dt_2 \int_{a_2} dS_2 . G_1(r_2,t_2/r_o,o). \nabla_2 . \Gamma_2(r,t/r_2,t_2) \qquad (7.2)$$

Si se lleva (7.2) a (7.1) se obtiene

$$G_1(r,t/r_o,o) - k^2 \int_o^t dt_1 \int_o^{t_1} dt_2 \int_{a_1} dS_1 \int_{a_2} dS_2 . G_1(r_2,t_2/r_o,o) \nabla_2 . \Gamma_2(r_1,t_1/r_2,t_2). \nabla_1 . \Gamma_1(r,t/r_1,t_1) = \Gamma_1(r,t/r_o,o) - k\int_o^t dt_1 \int_{a_1} dS_1 . \Gamma_2(r_1,t_1/r_o,o) \nabla_1 . \Gamma_1(r,t/r_1,t_1) \qquad (8)$$

La expresión (8) en forma operacional se puede escribir como

$$(I - H). G_1(r,t/r_o,o) = F(r,t/r_o,o) \qquad (9)$$

donde

$H.G_1(r,t/r_o,o)$ : es el segundo término del miembro izquierdo de (8).

$F(r,t/r_o,o)$ : Es el miembro derecho de (8).

La solución $G_1(r,t/r_o,o)$ se puede obtener de (9) haciendo

$$G_1(r,t/r_o,o) = (I-H)^{-1}. F(r,t/r_o,o)$$
$$= [I + H + H^2 + \ldots + H^n + \ldots]. F(r,t/r_o,o) \qquad (10)$$

Si las operaciones indicadas en (10) se realizan en forma explícita se obtiene finalmente la (6.1). La expresión (6.2) se obtiene si se lleva la (7.1) a la (7.2) y luego de rearreglar se hace la expansión de operadores.

## BIBLIOGRAFIA CITADA

1. **Kantorovich, L. V., Krylov, V. I.,** *Aproximate methods of higher analysis, Interscience, N.Y., 1964.*

2. **Courant, R, Hilbert, R.,** *Methods of Mathematical Physics, V. II, Intercience, N. Y., 1966.*

3. **Tychonov, A. N., Samarski, A. A.,** *Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Holden, - Day, San Francisco, 1964.*

4. **Morse, Ph. M., Feshbach, H.,** *Methods of theoretical Physics, Mc Graw Hill, 1953.*

5. **Hildebrand, F. B.,** *Methods of Applied Mathematics, Prentice - Hall, New Jersey, 1965*