

**INTEGRACION NUMERICA DE LA
ECUACION DE CONTINUIDAD EN CONDICIONES
DE ESTADO ESTACIONARIO**

J. L. Bendo

*Prof. Asociado de la Facultad de Ingeniería
Jefe del Dpto. Electrónica y Comunicaciones
Universidad de Los Andes
Mérida - Venezuela*

César Portes

*Ayudante de Cátedra de Física de la Ionosfera
Estudiante de la Universidad de Los Andes
Mérida - Venezuela*

RESUMEN

Se propone un método numérico de integración de la Ecuación de Continuidad en estado estacionario, incluyendo los procesos de difusión y de los vientos neutrales en el término que depende del transporte. Dicho método se basa en las decisiones booleanas que ha de tomar el computador cada vez que se produce el proceso iterativo hasta lograr la solución buscada del perfil del plasma.

INTRODUCCION

La Ecuación de Continuidad es una típica expresión causa-efecto de los procesos que intervienen en el equilibrio del plasma ionosférico. Cuando se particulariza para condiciones de estado estacionario, indica que el proceso de velocidad de producción de electrones se ve contrarrestado por la acción conjunta de la velocidad de destrucción de los mismos más el flujo de dispersión. Es decir:

$$q = I(N) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (1)$$

La complejidad de los términos que intervienen en (1) impide todo intento de integración analítica. Una integración numérica puede llevarse a cabo de la siguiente forma:

La velocidad de producción, que es función de la altura, se determina mediante una expresión conocida que incluye las intensidades de radiación ultravioleta procedentes del Sol, las secciones transversales de absorción e ionización y las correspondientes profundidades ópticas. (Hinteregger et al. (1965)).

La destrucción o pérdida de electrones, $I(N)$, es directamente proporcional a la concentración de plasma, N , siendo el coeficiente de proporcionalidad un parámetro, dependiente de la altura, el cual es fácilmente calculable.

La dificultad radica en el término que representa la divergencia del flujo de plasma, $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$.

Dicho flujo, J , viene dado por la expresión:

$$\vec{J} = N \cdot \vec{V} \quad (2)$$

en donde \vec{V} es la velocidad total del plasma. Esta velocidad se debe a las acciones superpuestas de difusión, vientos neutrales y campos eléctricos presentes en la ionosfera.

Para latitudes medias, en el rango de alturas ionosféricas, las líneas de fuerza del campo magnético terrestre son prácticamente paralelas y la divergencia puede aproximarse en la forma:

$$\vec{\nabla} \cdot (N \vec{V}) \cong \frac{\partial}{\partial l} (N V)$$

en donde l indica la dirección de las líneas de fuerza del campo magnético terrestre.

METODO DE INTEGRACION

Generalmente se acepta que las variaciones espaciales del término en derivada procedente de la divergencia son mucho más graduales en el plano horizontal que en el vertical. Por lo tanto dicha derivada se toma en el sentido vertical y la Ecuación de Continuidad (1) se transforma en:

$$q = \beta N + \frac{\partial}{\partial z} (N V_z) \quad (3)$$

V_z , la componente vertical de la velocidad total, puede expresarse en la forma

$$V_z = w_d + w_n \quad (4)$$

siendo:

$$w_d = V_d \text{sen}^2 \psi$$

y

$$w_n = v_{nx} \text{sen} \psi \cos \psi$$

En estas dos últimas expresiones ψ es el ángulo de inclinación del campo magnético terrestre, V_d es la velocidad de difusión del plasma y v_{nx} la componente horizontal según la dirección x (que se toma convencionalmente en la dirección del Este Geográfico) de la velocidad de los vientos neutrales.

La velocidad V_d se expresa:

$$V_d = -D_p \left(-\frac{1}{2H_p} + \frac{1}{T_p} \left(\frac{\partial T_p}{\partial z} \right) + \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial z} \right) \quad (5)$$

Siendo D_p el coeficiente de difusión del plasma, dependiente de la altura, H_p , su escala de altura y T_p la temperatura.

La velocidad V_{nx} se obtiene a partir de la ecuación de Boltzman la cual después de algunas manipulaciones se desdobra en dos componentes horizontales de la forma siguiente:

$$\left(\frac{\mu}{\rho} \right) \left(\frac{\partial^2 V_{nx}}{\partial z^2} \right) + f_c V_{ny} - f_d V_{nx} \text{sen}^2 \psi + F_x = 0 \quad (6)$$

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\left(\frac{\partial^2 V_{ny}}{\partial Z^2}\right) - f_c V_{nx} - f_d V_{ny} + F_y = 0 \quad (7)$$

En este sistema, μ es el coeficiente de viscosidad, dependiente de la altura, ρ es la densidad del aire, f_c es un parámetro relacionado con la fuerza de Coriolis, f_d es otro parámetro que depende de la fuerza de frenado que experimentan los electrones al chocar con las partículas neutras y F_x y F_y son las componentes horizontales de los gradientes de presión. Como puede observarse, la Ecuación de Continuidad está acoplada con las ecuaciones (4) y (5) a través del término dependiente de la velocidad resultando por tanto el siguiente sistema de ecuaciones para ser integrado en $N(Z)$.

$$q = \beta N + N \frac{\partial V_z}{\partial Z} + V_z \frac{\partial N}{\partial Z} \quad (3)$$

$$V_z = V_d \text{sen}^2 \psi + V_{nx} \text{sen} \psi \cos \psi \quad (4)$$

$$V_d = -D_p \left(\frac{1}{H_p} + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_n}{\partial Z} + \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial Z} \right) \quad (5)$$

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\left(\frac{\partial^2 V_{nx}}{\partial Z^2}\right) + f_c V_{ny} - f_d V_{nx} \text{sen}^2 \psi + F_x = 0 \quad (6)$$

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\left(\frac{\partial^2 V_{ny}}{\partial Z^2}\right) - f_c V_{nx} - f_d V_{ny} + F_y = 0 \quad (7)$$

Si en las expresiones (6) y (7) despreciamos, por el momento, los términos dependientes de la viscosidad, dicho par de ecuaciones diferenciales se convierten en algebraicas y de ellas puede obtenerse V_x , con lo que el sistema de ecuaciones a ser integrado queda reducido a un par de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, con coeficientes variables.

El efecto de despreciar los términos dependientes de la viscosidad no afecta al perfil de la concentración de plasma a alturas

pequeñas, digamos, hasta los 300 Km., porque a tales alturas los vientos neutrales están fuertemente controlados por las acciones de Coriolis y de frenado, mientras que las fuerzas de viscosidad son prácticamente despreciables. A grandes alturas ocurre exactamente lo contrario: el rápido decrecimiento de la densidad con la altura hace que el término dependiente de la viscosidad domine sobre el resto de los términos que intervienen en la ecuación.

Con el fin de hacer una estimación de la magnitud del término dependiente de la viscosidad, consideremos un rango de alturas en el que dicho término predomine fuertemente; es decir, que cualquiera de las ecuaciones (6) ó (7) podrá escribirse en la forma simplificada,

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\left(\frac{\partial^2 V_n}{\partial Z^2}\right) = 0 \quad (8)$$

en donde V_n representa V_{nx} ó V_{ny}

Puesto que ρ varía con la altura mucho más rápidamente que μ aceptaremos que únicamente ρ es variable con la altura. Por tanto:

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial V_n}{\partial Z} \right) = -\frac{\mu}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial Z} \right) \left(\frac{\partial V_n}{\partial Z} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 V_n}{\partial Z^2} \quad (9)$$

De acuerdo con la ecuación (8), el segundo término del segundo miembro de (9) es cero, y como la variación de ρ con la altura es de la forma

$$\rho \propto \exp\left(-\frac{Z}{H}\right)$$

la Ecuación (9) quedará en la forma

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial V_n}{\partial Z} \right) = -\frac{\mu}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial Z} \left(\frac{\partial V_n}{\partial Z} \right) - \frac{\mu}{\rho H} \left(\frac{\partial V_n}{\partial Z} \right)$$

y separando variables nos queda

$$\frac{d\left(\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial V_n}{\partial Z}\right)}{\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial V_n}{\partial Z}} = \frac{dZ}{H}$$

cuya integral dá

$$\frac{dV_n}{dZ} \propto \exp\left(\frac{Z}{H}\right) \quad (10)$$

Si la derivada de V_n varía según (10), V_n seguirá la misma ley de variación y por tanto los términos

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right) \left(\frac{\partial^2 V_{nx}}{\partial Z^2}\right)$$

y

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right) \left(\frac{\partial^2 V_{ny}}{\partial Z^2}\right)$$

podrán reemplazarse por sus valores aproximados

$$\frac{\mu}{\rho H^2} V_{nx}$$

y

$$\frac{\mu}{\rho H^2} V_{ny}$$

Puesto que f_c , el parámetro de Coriolis, es independiente de la altura, comparando a cada nivel ionosférico el parámetro $\frac{\mu}{\rho H^2}$ con f_c , el parámetro que depende de la fuerza de frenado,

es posible determinar la altura a la que la viscosidad domina. A partir de esa altura y hasta el tope superior de la ionosfera, se puede aceptar que la velocidad de los vientos neutrales es independiente de la altura ya que en ese rango de altura el gradiente de velocidad debe tender a cero pues de otro modo la viscosidad llegaría a ser exageradamente grande. En vista de lo dicho

consideraremos el efecto de viscosidad indirectamente como condición de contorno impuesta al perfil de velocidad de los vientos neutrales, el cual se obtiene al integrar el siguiente par de ecuaciones:

$$W_d = -D_a \left(\frac{1}{2H_p} + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial Z} + \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial Z} \right) \quad (11)$$

$$q = \beta N + N \frac{\partial}{\partial Z} (w_d + w_n) + (w_d + w_n) \frac{\partial N}{\partial Z} \quad (12)$$

en donde

$$D_a = D_p \text{sen}^2 \psi$$

$$w_n = \frac{f_d F_x + f_c F_y}{f_c^2 + f_d^2 \text{sen}^2 \psi} \text{sen } \psi \cos \psi$$

El programa de computadora diseñado para resolver las ecuaciones (11) y (12) incluye una serie de subrutinas que permiten el cálculo de los parámetros D_a , H_p , q , β , F_x y F_y en función de la altura, para cada nivel de actividad solar. Los términos en derivadas $\partial T_p / \partial Z$ y $\partial n / \partial Z$ se aproximan por sus equivalentes en diferencias finitas; es decir, en el paso de integración de orden j , estos términos tienen por expresión:

$$\left(\frac{\partial T_p}{\partial Z_j} \right) = \frac{T_{p_{j+1}} - T_{p_{j-1}}}{2\Delta Z}$$

$$\left(\frac{\partial w_n}{\partial Z_j} \right) = \frac{w_{n_{j+1}} - w_{n_{j-1}}}{2\Delta Z}$$

Fijamos el límite inferior a la altura $h_0 = 120$ Km. y el superior en $h_\infty = 600$ Km. En el límite inferior aceptamos que la concentración N_0 y la velocidad de los vientos neutrales, Vn_0 son idénticamente iguales a cero. La condición de contorno en el límite superior es que el flujo de difusión se hace cero; es decir:

$$(N w_d)_{z = h_\infty} = 0$$

En el rango de alturas entre h_0 y h se divide en n franjas horizontales de modo que

$$n = \frac{h_\infty - h_0}{\Delta h} + 1$$

Siendo Δh el espesor de cada franja. En la simulación llevada a cabo en el presente trabajo se tomó $\Delta h = 5$ Km.

La condición de contorno impuesta en el límite superior puede ser satisfecha para cualquier valor arbitrario de la concentración de electrones, poniendo sencillamente

$$(w_d)_{z = h_\infty} = 0$$

Sin embargo, puesto que la resolución del sistema de ecuaciones (11) y (12) procede paso a paso comenzando desde el tope superior hacia abajo, el valor de la concentración de electrones que se obtendrá en el tope inferior, en general, no satisfara la condición del contorno que habíamos impuesto en ese límite; es decir:

$$(N)_{z = h_0} = 0$$

El único modo de que las dos condiciones de contorno se verifiquen simultáneamente es por una serie de aproximaciones sucesivas. Los posibles tipos de comportamiento en el perfil de la concentración de plasma que pueden obtenerse se ilustran en la figura 1.

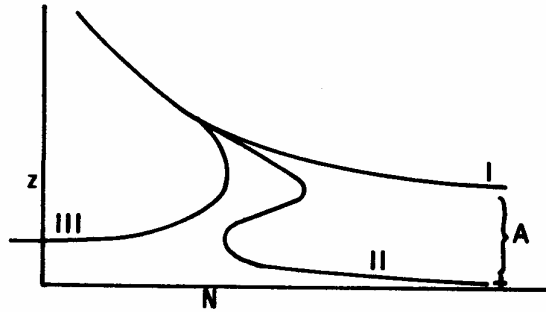


Fig. 1. Decisiones booleanas en el computador

La solución I lleva a valores exagerados de N . La solución II conduce a valores exagerados de N también, pero primero pasa por un máximo local de N . La solución III lleva a valores negativos de N .

Las soluciones I y II son denominadas "Condición A" (valores excesivos de N) y la solución III es denominada "Condición B" (valores insuficientes de N).

La primera pasada a través del computador la denominamos "Condición 0". Comparaciones booleanas en el computador reconocen la condición correspondiente. Así pues, si la condición era 0, por ejemplo, y fué a la condición A, la concentración de plasma $(N)_{z=h}$ se modificará en la forma

$$(N)_{z=h} = (N)_{z=h} + \Delta N$$

en donde ΔN es el incremento de la concentración de plasma, introducido en el programa.

Como síntesis de lo expresado considérese la Tabla I

TABLA I

CONDICION	DECISION BOOLEANA
Era 0	
<i>Fué a A</i>	$(N)_{z=h_0} - (N)_{z=h_0} - \Delta N$
<i>Fué a B</i>	$(N)_{z=h_0} - (N)_{z=h_0} + \Delta N$
Era A	
<i>Queda en A</i>	$(N)_{z=h_0} - (N)_{z=h_0} - \Delta N$
<i>Cambia a B</i>	$(N)_{z=h_0} - (N)_{z=h_0} + \Delta N \left(\Delta N \frac{\Delta N}{10} \right)$
Era B	
<i>Cambia a A</i>	$(N)_{z=h_0} - (N)_{z=h_0} - \Delta N \left(\Delta N \frac{\Delta N}{10} \right)$
<i>Queda en B</i>	$(N)_{z=h_0} - (N)_{z=h_0} + \Delta N$

APLICACION NUMERICA

Como aplicación del método descrito se integró la Ecuación de Continuidad para tres niveles de actividad solar, representados por tres valores del flujo de ionización correspondiente a la longitud de onda de microondas ($\lambda = 10.7$ cm). El primer valor $S = 75$, es representativo de un nivel de actividad solar bajo; el segundo, $S = 150$, da idea del comportamiento ionosférico para un nivel de actividad medio y el último, $S = 225$, representa el nivel alto de actividad solar.

En la figura 2 se han representado las velocidades de producción correspondientes a los tres niveles de actividad solar arriba mencionados. Puede observarse que el pico de producción, que corresponde a una profundidad óptica unidad, permanece prácticamente invariable, modificándose únicamente los valores de la velocidad de producción a todos los niveles.

La figura 3 representa la solución de la Ecuación de Continuidad N , es decir el perfil de la concentración de plasma para los tres (3) niveles de actividad solar. Como la integración se llevó a cabo en condición de estado estacionario, se tomó el tiempo invariable. Con el fin de aproximar la simulación a la realidad, se hicieron todos los cálculos para $HL = 1400$ horas, que es cuando la ionósfera se comporta muy próximamente al estado estacionario.

Los resultados son enteramente satisfactorios ya que se aproximan a valores obtenidos, por aplicación de otras técnicas.

El programa que realiza la simulación incluye la integración numérica del perfil del plasma con la altura, que da el contenido total electrónico I , la producción integrada, Q , las pérdidas totales, L y finalmente mediante interpolación no lineal obtiene la altura del pico de plasma y concentración de plasma correspondiente.

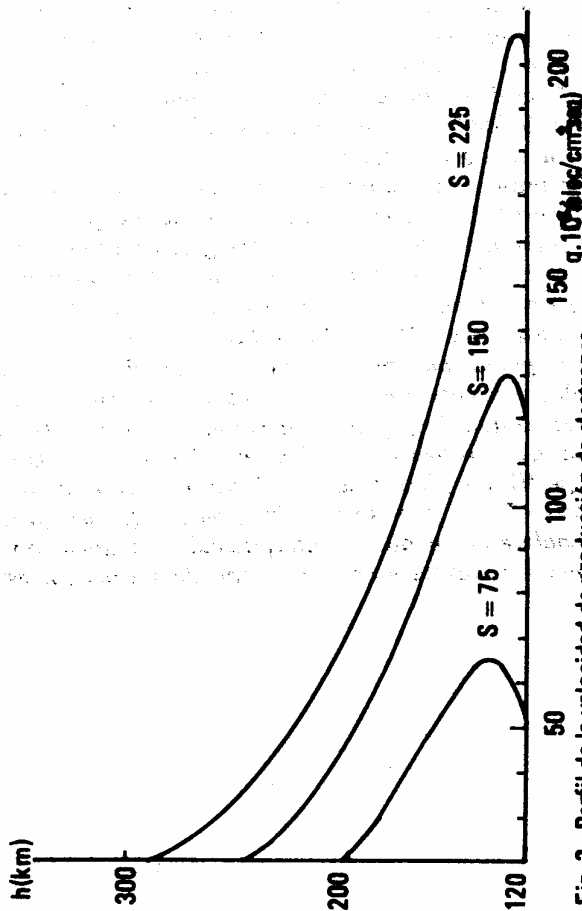


Fig. 2.- Perfil de la velocidad de producción de electrones para tres diferentes niveles de actividad solar.

Actividad Solar, S
 $(10^{-22} \text{ wats/m}^2 \cdot \text{seg}^{-1})$

Producción Integral, Q
 $(\text{en elec/cm}^2 \cdot \text{seg})$

75.0

4.865620×10^{10}

150.0

1.040430×10^{11}

225.0

1.637943×10^{11}

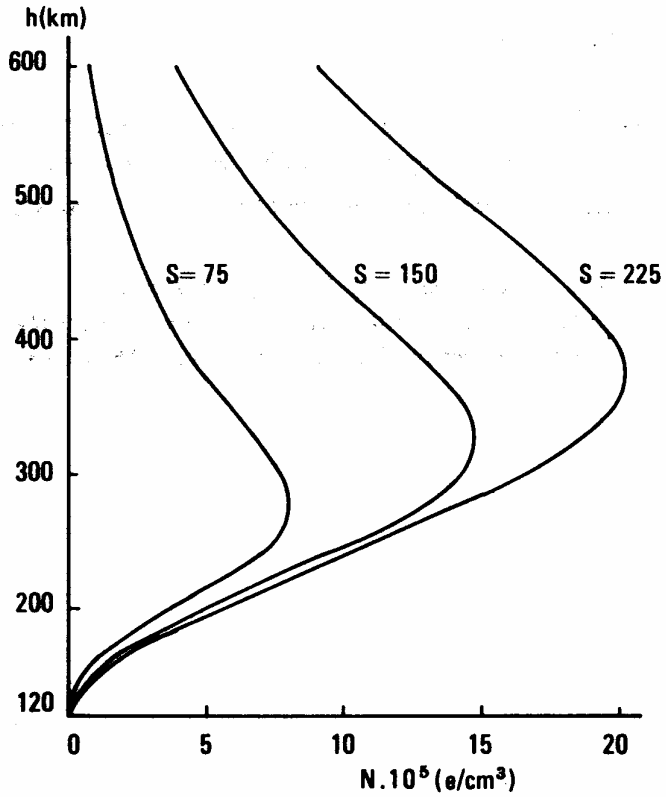


Fig. 3.- Perfil de la concentración de electrones para tres diferentes niveles de actividad solar.

Actividad Solar, S (en 10^{-22} watts- m^2 -seg $^{-1}$)	75	150	225
Densidad de electrones en el pico (en electrones- m^3)	2.03×10^6	1.48×10^6	2.03×10^6
Altura del pico de la capa F_2 (en Km.)	275.6	324.6	373.9
Contenido elec. (en electrones- cm^2)	1.76×10^{13}	4.04×10^{13}	6.106×10^{13}
(Pérdidas Totales (en electrones- cm^2 -seg $^{-1}$))	3.47×10^{10}	7.0×10^{10}	8.22×10^{10}

BIBLIOGRAFIA

Hinteregger, H. E., L.A. Hall, and Schidtke, "Solar XUV radiation and neutral particle distribution in July 1963 thermosphere".

Space Res., V, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1175, 1965.

Bendito, J.L., *The Midlatitude Ionospheric Response to Fluctuations in Solar Activity under low Geomagnetic Activity Conditions.* Stanford University, Technical Report N° 16- 1.973.