

**ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA EN ALGUNAS
SOLUCIONES NUMERICAS DE FLUJO BIDIMENSIONAL
EN MEDIOS POROSOS**

*Julián Aguirre Pe
Profesor Agregado, Mecánica de Fluidos
Jefe Dpto. de Hidráulica y Sanitaria
Facultad de Ingeniería - CIDIAT
Universidad de Los Andes
Mérida - Venezuela*

RESUMEN

En este trabajo se comparan diferentes soluciones numéricas en problemas de flujo subterráneo bidimensional, no permanente y con infiltración. Se estudian los efectos de estabilidad y convergencia cuando se emplean técnicas explícitas e implícitas. Se establecen criterios para el empleo de intervalos de tiempo y espacio adecuados en los esquemas numéricos. Se encuentran los límites entre los cuales una pequeña perturbación producida por un excesivo intervalo de tiempo no afecta la propia solución del problema.

* Trabajo presentado en el VI Congreso Latinoamericano de Hidráulica, efectuado en Julio de 1.974, Bogotá, Colombia.

1.- INTRODUCCION

El problema de flujo en un medio poroso originado por la diferencia de carga entre dos masas de fluido ha sido ampliamente estudiado por diversos autores. Los métodos de solución, en general emplean alguna de las siguientes técnicas: Variable compleja, red de flujo, procedimiento numéricos de alta velocidad o desarrollos de teorías aproximadas. Entre éstas, la teoría de Dupuit proporciona medios adecuados para la solución de problemas cuando por ejemplo, con referencia a la figura 1, se cumplen las siguientes dos condiciones:

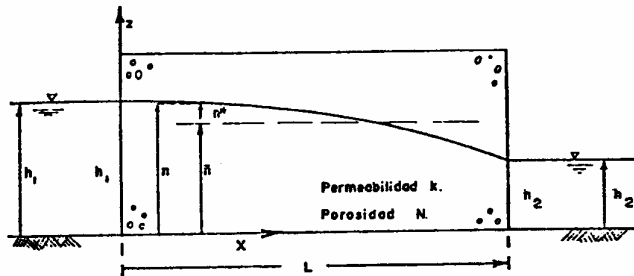


Fig. 1.- Esquema de Definición para un flujo Bidimensional en un Medio Poroso Homogéneo.

Primero $n^*/\bar{n} \ll 1$, es decir n^* es relativamente pequeña y segundo $(h_1 - h_2)/L \ll 1$, o lo que es lo mismo, la pendiente de la superficie libre es pequeña y en consecuencia se tiene que $\partial h/\partial z \ll 1$, donde h es la energía piezométrica. Siendo $\partial h/\partial z \ll 1$ en la superficie libre y $\partial h/\partial z = 0$ en el fondo y en las dos caras verticales terminales, se puede escribir que $\partial h/\partial z = 0$ en cualquier plano vertical y así $h = n$.

Si se considera el fenómeno impermanente que se produce por la repentina variación de uno de los niveles terminales, la ecuación que gobierna el fenómeno, de acuerdo con las hipótesis de Dupuit, se puede escribir como

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{2N} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} \quad (1)$$

donde t es tiempo y x es la distancia para los cuales se quiere determinar $h = f(x,t)$. La ecuación diferencial en derivadas parciales, ec. 1, puede expresarse en forma adimensional como

$$\frac{\partial H}{\partial T} = \frac{\partial^2 H^2}{\partial X^2} \quad (2)$$

donde las variables pueden definirse por las expresiones $h=h_0 H$, $t = \tau T$, $x = XL$, donde τ es un tiempo característico tal que $\tau = 2NL^2/Kh_0$, definido por Aguirre y Street¹. Adicionalmente, mediante la sustitución $V = H^2$, la ec. 2 puede transformarse en la forma cuasilineal

$$\frac{1}{2V^{1/2}} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \quad (3)$$

la cual tiene una solución exacta para el problema de flujo permanente hacia la que deben convergir las soluciones del flujo impermanente. Remson Hornberger y Moltz², han presentado formas explícitas e implícitas para la solución numérica de la ec. 3.

2.- SOLUCIONES NUMERICAS EXPLICITAS

El esquema explícito corresponde al cálculo de $V_{i,j+1}$ (i por X y j por T) para cualquier i en términos de las V en el nivel j . La variable a encontrar en forma explícita está dada por

$$V_{i,j+1} = V_{i,j} + \frac{\Delta T}{\Delta X^2} 2V_{i,j}^{1/2} (V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}) \quad (4)$$

Este procedimiento es estable y converge a la solución verdadera si ΔT y ΔX tienden a cero de tal forma que

- (1) Aguirre, J., y Street, R., "Implicit and Explicit Techniques in Ground-Water Flow with Infiltration", Proceedings XV Congress I.A.H.R. Estambul, 1973.
 (2) Remson, Hornberger y Moltz, "Numerical Methods in Subsurface Hydrology", Wiley-Interscience, 1971.

$$r = \frac{\Delta T}{\Delta X^2} \leq \frac{1}{2}$$

El criterio de estabilidad, indicado por Ames³, resulta ser rigurosamente preciso para su aplicación práctica. En el caso correspondiente a las condiciones iniciales $h_1 = 20$ m., $h_2 = 20$ m. para $t = 0$, $L = 200$ m. y $K = 10$ m/día sobre el cual se impone un descenso repentino de h_2 tal que $h_2 = 10$ m. para $t > 0$ resulta, claramente, de la aplicación de la ec. 4 con $\Delta X = 0,1$ y $\Delta T = 0,0025$, que el proceso es estable y convergente hacia la solución verdadera para el límite dado por $r = 0,25$. Los resultados de este procedimiento explícito se presentan en la Fig. 2. Sin embargo, si $r > 0,25$ el esquema se hace inestable y no permite la solución del problema.

En la Fig. 3 se observa que para $\Delta X = 0,10$ y $\Delta T = 0,0030$ se produce inestabilidad y que el proceso no converge hacia la solución verdadera. Cuando $\Delta X = 0,10$ y $\Delta T = 0,0050$ la inestabilidad se intensifica de tal forma que para $\Delta T > 0,015$ se tiene que $V(X,T)$ se vuelve negativa (lo cual es físicamente imposible ya que $V = H^2$) induciendo la impresión de un mensaje de error por el computador. Para ambos intervalos de tiempo, los valores del gasto difieren del que se obtiene en el proceso estable.

Otro problema similar, para el cual se verifica la limitación correspondiente a la estabilidad se presenta cuando en el caso anterior se sustituye la condición de borde de Dirichlet (h dada) por la condición de Neumann referida por Berg y McGregor⁴. Para $x = L$ se establece un caudal de salida q tal que

$$q = -Kh(L,t) \frac{\partial h(L,t)}{\partial x} \quad (5)$$

para $t > 0$. Si q fuera el caudal correspondiente al flujo permanente obtenido de la hipótesis de Dupuit, para $h_1 = 10$ m., en el caso anterior, partiendo de idéntica condición inicial, se debería esperar que la condición de carga terminal tendiera al valor $h_2 = 10$ m. para valores grandes de t . La solución en forma adimensional se puede obtener empleando la ec. 4 la cual se verifica para $0 < X < 1$ y para $T > 0$. Se tiene $V(0,T) = 1$ y para

(3) Ames, W. F., "Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering", Academic Press, 1.965.

(4) Berg, P.W., y McGregor, J.L., "Elementary Partial Differential Equations", Holden Day, 1.966

$x = L$, $\partial V(1,T)/\partial X = -Q$ donde Q es el gasto adimensional correspondiente a la etapa final del flujo permanente dado por la expresión

$$Q = 2Lq/(Kh_1^2) = 1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \quad (6)$$

Efectivamente, como se muestra en las Figs. 4 y 5, h alcanza el valor correspondiente al caso anterior para $r = 0,25$. La condición de Neumann fué introducida en el esquema de cálculo haciendo uso de puntos ficticios en $X = 1 + \Delta X$ permitiendo así escribir en diferencias finitas

$$V_{im+1,j} = V_{im-1,j} - 2Q\Delta X \quad (7)$$

donde el subíndice m se refiere al último contorno para el cual se prescribió la nueva condición.

Los procesos de inestabilidad pueden eliminarse o por lo menos amortiguarse por medio de técnicas implícitas desarrolladas por Crank y Nicolson⁵ y modificadas por Douglas y Jones⁶.

3.- SOLUCIONES NUMERICAS IMPLICITAS

En el esquema implícito desarrollado por Douglas y Jones se requiere el conocimiento de los $V_{i,j}$ con los cuales se determinan

$$V_{i-1,j+1/2}; V_{i,j+1/2}; V_{i+1,j+1/2}$$

a través de la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales para el que la matriz de los coeficientes es tri-diagonal permitiendo una solución fácil a través del algoritmo de Thomas. Los valores de $V_{i,j+1/2}$ obtenidos en el nivel $j+1/2$ se emplean para hallar $V_{i,j+1}$. Luego se expresa $\partial^2 V/\partial X^2$ en el nivel $j+1/2$ en la forma,

(5) Crank, J., y Nicolson, P., "A Practical Method for Numerical Evaluation of Solutions of Partial Differential Equations of the Heat Conduction Type", Phil. Soc., 43, 1.963.

(6) Douglas, J., y Jones, B. F., "On Predictor Corrector Methods for Nonlinear Parabolic Differential Equations", Journal SIAM, 11, 1.963.

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right|_{i,j+1/2} = \lambda \left. \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right|_{i,j+1} + (1-\lambda) \left. \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right|_{i,j} \quad (8)$$

Este es un paso de corrección y fué empleado en un problema de infiltración con variación repentina en el nivel terminal por Aguirre y Street¹ con $\lambda = 1/2$ siguiendo el procedimiento de Crank y Nicolson⁵. En este caso se reproduce el problema señalado en los párrafos anteriores, con elevación h_1 , superponiendo una infiltración constante e sobre el suelo homogéneo que repentinamente es sometido a la diferencia de nivel del agua entre sus dos secciones terminales. Para la condición indicada, la ec. 3 se debe transformar en

$$\frac{1}{2V^{1/2}} \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + E \quad (9)$$

donde E es una infiltración adimensional tal que $E = 2L^2 e/(Kh_1^2)$, Hagamos $E = 2 \cdot 10^{-2}$, $\Delta X = 0,1$; para las condiciones iniciales: $V(X,0) = 0,25$ para $0 \leq X \leq 1$ y para las condiciones de borde: $V(0,T) = 1$ y $V(1,T) = 0,25$ para $T > 0$.

La predicción de V en los niveles $j + 1/2$ se obtiene de

$$\frac{V_{i-1,j+1/2} - 2V_{i,j+1/2} + V_{i+1,j+1/2}}{X^2} = \frac{V_{i,j+1/2} - V_{i,j}}{\Delta T V_{i,j}^{1/2}} - E \quad (10)$$

El modelo numérico correspondiente al operador de corrección se puede expresar por

$$\begin{aligned} & \frac{V_{i-1,j+1} - 2V_{i,j+1} + V_{i+1,j+1} + V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j}}{\Delta T V_{i,j+1/2}^{1/2}} = \\ & = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta T V_{i,j+1/2}^{1/2}} - 2E \end{aligned} \quad (11)$$

De acuerdo con Douglas y Jones este esquema es incondicionalmente estable con error de residuo $O(\Delta X^2 + \Delta T^2)$ Una vez que se toma ΔX , cuando se emplea el método implícito, el criterio de estabilidad enunciado en la sección previa no es limitante para la escogencia de ΔX , solamente dentro de cier-

tos límites. En realidad, el cálculo indica la aparición de perturbaciones cuando el valor de ΔT se hace próximo a ΔX . En la Fig. 6 se observa el efecto oscilatorio en la superficie libre calculada, para distintos valores de ΔT con $\Delta X = 0,1$ constante. Las desviaciones están graficadas para una sección próxima al contorno que repentinamente se eleva, en relación con los valores verdaderos de carga piezométrica adimensional H_0 que se obtienen con el método explícito, los cuales no se alteran en el procedimiento implícito hasta $\Delta T \leq 0,005$. Los valores numéricos correspondientes a este gráfico se obtuvieron en diferentes operaciones del programa para $\Delta T = 0,015$; $\Delta T = 0,020$;

Las oscilaciones son más fuertes en la vecindad del contorno cuya carga cambia repentinamente pero ellas se amortiguan sin alterar la solución para $\Delta T \leq \Delta X/5$. Cuando ΔT se hizo mayor, las oscilaciones persistieron por un tiempo mayor que el requerido para alcanzar el estado permanente $T_p = 0,40$.

Lo más sorprendente es que para $\Delta T = \Delta X$, y, $\Delta T = 1,2\Delta X$ el esquema parece converger a soluciones diferentes que la real con oscilaciones de perturbación aún para $T = 3$ y $T = 4,8$.

4.- CONCLUSIONES

- a.- El esquema implícito se compara favorablemente con el explícito para los problemas tratados, algunas de las ventajas que se obtuvieron son las siguientes:
 - El procedimiento implícito permite una mayor libertad en la selección de los intervalos de longitud y tiempo.
 - Las oscilaciones en la carga no afectan la solución mientras que el intervalo ΔT no sea muy próximo a ΔX .
 - Existe apreciable economía en el tiempo de computadora; por ejemplo, este se redujo en el último caso de 4,05 segundos en el esquema explícito con $\Delta T = 0,0025$ a 1,94 segundos en el implícito con $\Delta T = 0,02$, para el mismo número de soluciones parciales sin que la inestabilidad fuera importante en el segundo método para $X > 0,1$.
- b.- La estabilidad en el método implícito no es incondicional. En efecto, la predicción de los $V_{i,j+1+1/2}$ se realiza con un esquema numérico que es inestable por sí mismo. La corrección ulterior no elimina esta dificultad, según lo muestran los resultados obtenidos. Con el fin de conservar la estabilidad y convergencia, parece recomendable seguir el si-

guiente criterio:

- El intervalo de tiempo ΔT debe ser suficientemente pequeño como para evitar el orden de magnitud de T_p y de ΔT sea el mismo. En términos prácticos podría hacerse $\Delta T \leq \Delta X T_p$. Esta proposición requiere una estimación previa del valor de T_p .

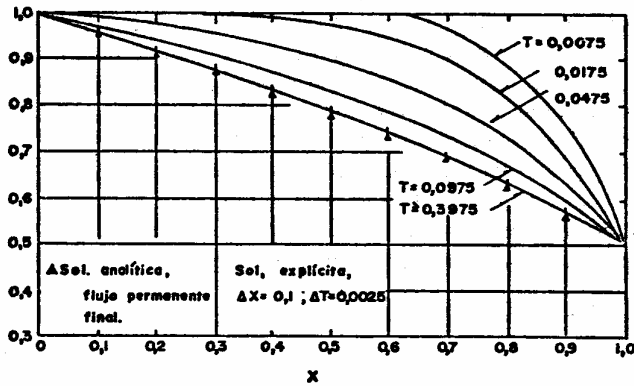


Fig. 2.- Gráfico Adimensional de la Superficie Libre.
Condición Inicial: $H(X,0) = 1$ para $0 < X < 1$.
Condición de Borde: $H(0,T) = 1; H(1,T) = 0,5$
para $T > 0$.

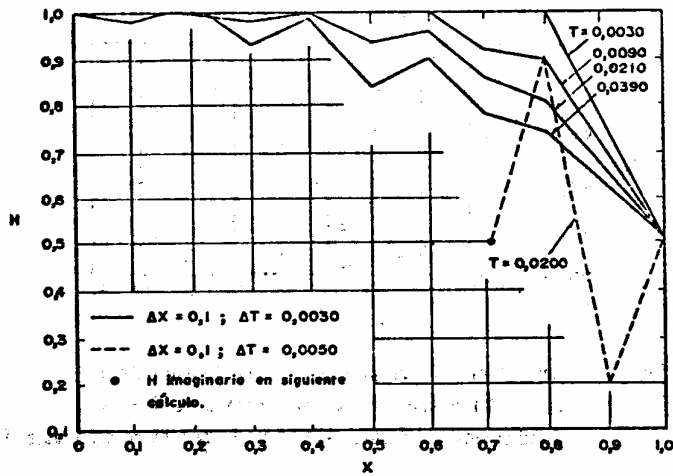


Fig. 3.- Resultados Adimensionales en Proceso Inestable.
 Condición inicial: $H(X,0) = 1$ para $0 \leq X \leq 1$.
 Condiciones de Borde: $H(0,T) = 1$; $H(1,T) = 0,5$ para $T > 0$.

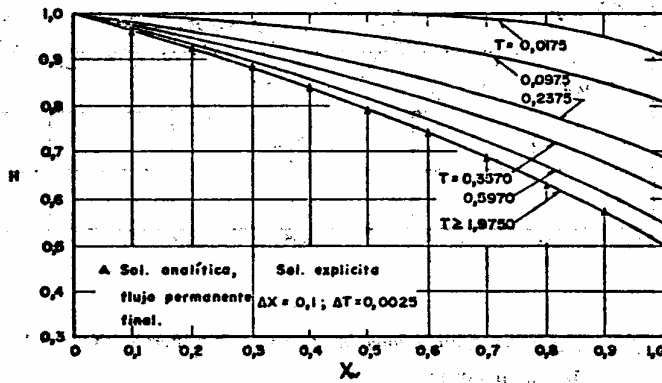


Fig. 4.- Gráfico Adimensional de la Superficie Libre.
 Condición Inicial: $H(X,0) = 1$; para $0 \leq X \leq 1$.
 Condiciones de Borde: $H(0,T) = 1$; $Q(1,T) = 0,75$ para $T > 0$.

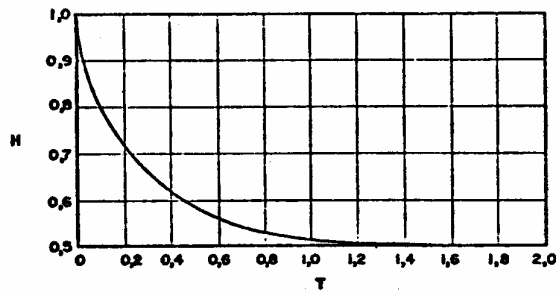


Fig. 5.- Carga Piezométrica para $X = 1$ en función de T .
 Condición Inicial: $H(X,0) = 1$ para $0 < X < 1$.
 Condiciones de Borde: $H(0,T) = 1$; $Q(1,T) = 0,75$ para $T > 0$.

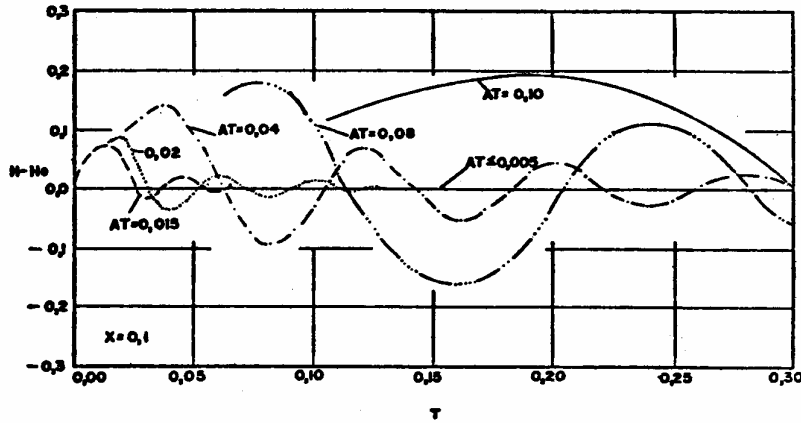


Fig. 6.- Desviación Adimensional de la Carga Piezométrica $X = 0,1$.
 Método Implícito.