Introducción a un Curso de Geometría Descriptiva

Por el Profesor R. FERRER SOTO

La ciencias puras se construyen rigurosamente por el método axiomático, que consiste en admitir la existencia (1) de unos entes o **elementos** y ciertas proposiciones llamadas **axiomas** o **postulados,** que tales elementos deben cumplir y deducir sistemáticamente mediante razonamiento lógico, relaciones y propiedades. Los elementos entre los cuales se establecen los postulados no se definen. Puede considerarse, como lo hace ENRIQUES, que los elementos quedan **definidos implícitamente** por los postulados. La distinción que algunos matemáticos hacen entre "axiomas" y "postulados" entendemos que carece de interés, pues creemos que las diferencias que geómetras como VERONESE y VAILATI establecen, no van más allá de ser matices de interpretación; no son realmente diferencias esenciales.

La estructuración lógica de una ciencia pura ha de ser así, pues los conceptos se definen por su reducción a conceptos anteriores más simples; reducción que no puede prolongarse indefinidamente, porque se llegará a conceptos tan sencillos que no podrán ser lógicamente expresados. La crítica de las proposiciones conduce a parigual resultado: en el terreno de la lógica, es verdad lo demostrable y consecuentemente la aceptación de un enunciado se subordina a su demostración, que es asimismo una reducción lógica a proposiciones anteriores. También este desarrollo conduce a proposiciones muy sencillas, en cuya reducción la lógica se muestra inoperante, porque son de naturaleza esencialmente **intuitiva.** En la base de todo edificio lógico se encuentra la intuición. (2)

Se renuncia, pues, a la definición de ciertos entes que se consideran **conceptos primitivos** o **elementos** y a la demostración de ciertos enunciados que se establecen como **proposiciones primeras** o **postulados.**

Los postulados fundamentales elegidos para la construcción de una Geometría han de cumplir la condición esencial de no ser contradictorios (condición de compatibilidad) y la condición, ya no esencial, pero sí conveniente a la elaboración lógica, de ser independientes (condición de independencia), es decir que ninguno de ellos sea consecuencia de los otros o de algunos de los otros. Asimismo es recomendable que el número de postulados que se admita sea el menor posible.

Teóricamente, pues, podrían ser creadas infinitas geometrías por la gran libertad que hay en la elección del conjunto de postulados que genera cada geometría, sólo restringida por la condición antedicha de compatibilidad. Prácticamente se han creado algunas geometrías muy interesantes por su aplicación en la propia Matemática y en la Física.

Una vez adoptado un sistema de postulados, se definen **figuras** (conjuntos de elementos que cumplen una ley), y **operaciones geométricas** (leyes que relacionan los elementos de dos figuras). (3) Las proyecciones y secciones, las rotaciones, simetrías, traslaciones, etc., son operaciones geométricas.

Si se aplica a una figura F_1 cierta operación T se obtendrá una nueva figura F_2 llamada transformadas de F_1 por T, o bien homóloga de F_1 en la transformación T. Si a la figura F_2 se aplica otra operación R, se obtendrá otra figura F_3. La operación que transforma directamente la F_1 en la F_3 se llama **producto** de las transformaciones T y R, operación que se representa por RT. Si la operación T transforma F_1 en F_2, llámase operación **inversa** de la T a la operación que transforma F_2 en la F_1, y se representa simbólicamente por T^{-1}

Cuando se realizan varias transformaciones sucesivas, se dice que se aplica una **cadena de transformaciones** o **cadena de operaciones,** equivalente a una sola, que es la operación producto de todas ellas en el mismo orden en que se han aplicado, pues el producto de operaciones no tiene, en general, la propiedad conmutativa.

Supuesto que la figura F_1 se transforma en la F_2 mediante la operación T, si cierta propiedad que cumple la figura F_1 es cumplida también por la F_2, se dice que tal propiedad es **invariante** en la transformación T. Consideremos, por ejemplo, un triángulo rectángulo; si aplicamos a esta figura una rotación se obtiene como figura homóloga otro triángulo rectángulo, y en consecuencia, la perpendicularidad es un invariante en la rotación. Si cierta propiedad es invariante en dos operaciones, también es invariante en el producto de ellas. Así, siendo la perpendicularidad invariante en la rotación y en la traslación, también es invariante en el producto de estas dos, o sea es invariante en un movimiento helicoidal. Las propiedades que se conservan invariantes en varias operaciones son invariantes también en el producto de un número finito de éstas.

Diremos que un conjunto de operaciones dadas constituye un **grupo,** cuando el producto de dos cualesquiera de las operaciones sea también una operación del conjunto dado y además, la inversa de cada operación pertenezca también al conjunto.

Llamamos **Geometría al conjunto de las propiedades invariantes en un determinado grupo de transformaciones.**

Dicho en forma equivalente: **Es la teoría de los invariantes correspondientes a un grupo de operaciones** (4)
Esta definición sistematiza la Geometría y permite establecer jerarquías, es decir, considerar unas geometrías como casos particulares de otras más amplias que son, respecto de las primeras, geometrías superiores.

Establecido un conjunto G de operaciones **que formen grupo,** es posible que otro conjunto g de transformaciones, comprendidas en el conjunto G, constituya a su vez un grupo. Se dice entonces que g es **subgrupo** del G. La Geometría correspondiente al grupo g es una particularización de la Geometría correspondiente al G. Habrá propiedades invariantes respecto del grupo g, pero no respecto del G; tales propiedades pertenecen a la Geometría del grupo G. Otras propiedades son invariantes respecto de las operaciones del G, pero no respecto de las del subgrupo g; estas propiedades pertenecen a la Geometría del grupo G. Finalmente, las propiedades que, siendo invariantes respecto del grupo g, también lo sean respecto del G, pertenecen en esencia a la Geometría de este último grupo superior, aunque pueden ser estudiadas en ambas geometrías.

En orden de jerarquía creciente se encuentran: la Geometría Métrica, la Afin, la Geometría Proyectiva y la Topología o Análisis Situs.

El grupo de operaciones constituído por: traslaciones, giros, simetrías axiales y homotecias recibe el nombre de **grupo equiforme,** y las propiedades invariantes en este grupo constituyen la Geometría Métrica. El grupo que define la Métrica se llama equiforme, porque sus operaciones conservan siempre la forma de las figuras, puesto que permanecen invariantes las magnitudes angulares y las razones de distancias, por lo cual la Métrica recibe también el nombre de Geometría de la Semejanza. Conservándose las magnitudes angulares invariantes en las transformaciones métricas se conservará el paralelismo y la perpendicularidad. Conservándose las razones de distancias, una circunferencia se transformará en otra circunferencia y cualquier cónica en otra cónica del mismo nombre y de la misma excentricidad. En resumen, una figura se convierte, mediante transformaciones métricas, en otra figura **semejante.** (5)

Las operaciones fundamentales de la **Geometría Proyectiva** son las proyecciones y secciones. Todas aquellas propiedades invariantes en las proyecciones y secciones constituyen la

Geometría Proyectiva, y reciben el nombre de "propiedades gráficas" (6) Las transformaciones proyectivas reciben el nombre genérico de **proyectividades.**

El **orden** de una curva plana (número de puntos en que una recta genérica la corta), es un invariante proyectivo. En consecuencia, las cónicas se transforman en cónicas mediante proyectividades, y las rectas en rectas. Evidentemente, el paralelismo y la perpendicularidad no son propiedades proyectivas, pues no se conservan por proyecciones y secciones.

Las transformaciones métricas son particularizaciones de las operaciones proyectivas y, por tanto, la Geometría Métrica es caso particular de la Proyectiva. Así, por ejemplo, se demuestra que una homotecia (operación métrica) es una homología (transformación proyectiva) de centro propio y eje impropio; una traslación (operación métrica) también es una homología de centro y eje impropios.

El paralelismo y la perpendicularidad son invariantes métricos. En la Geometría Proyectiva no aparece el concepto de **distancia,** concepto que es fundamental en la Métrica.

La Geometría Afín es un caso particular de la Proyectiva: En lugar de manejar puntos y rectas, utiliza **direcciones** y **orientaciones.** Así, en la Proyectiva se proyecta desde cualquier punto; en cambio, en la Afín se proyecta según una dirección (proyección paralela, o sea, proyección desde un punto impropio), que es una particularización de la proyección en general. Las transformaciones afines se llaman **afinidades.** Cuando dos figuras son homólogas en una afinidad, se dice que son **afines.**

En las afinidades se conservan invariantes las razones entre las áreas planas y las razones entre los volúmenes homólogos. También es invariante el paralelismo y, en consecuencia, un paralelogramo se transformará, mediante una afinidad, en otro paralelogramo; pero no se conserva la perpendicularidad. Toda cónica, mediante una afinidad, se transforma en otra cónica de la misma especie, aunque no, en general, de la misma excentricidad (cuando se trata de elipses e hipérbolas) (7).

Nota.—La Geometría Métrica es caso particular de la Afín, pues las operaciones métricas son particularizaciones de las afinidades. En efecto, en el plano, por ejemplo, la recta del infinito es doble en toda afinidad; y en las operaciones métricas, además de ser doble la recta del infinito, son dobles cierto par de puntos de esta recta, que se llaman **puntos umbilicales** o **puntos cíclicos** del plano. En el espacio de tres dimensiones, las afinidades conservan doble el plano del infinito, y las operaciones métricas, además de conservar como elemento doble el plano del infinito, tienen como doble cierta línea imaginaria que se llama la "curva esférica del infinito"; dicho en lenguaje proyectivo, conservan la **polaridad absoluta.**

El Análisis Situs o Topología es la teoría de los invariantes correspondientes a las **transformaciones biunívocas y continuas.** Estas transformaciones reciben el nombre de **homeomorfismos** u **homeomorfías** y también el de transformaciones topológicas. Las transformaciones homeomórficas son **deformaciones continuas** de las líneas y superficies, conservándose invariantes en tales transformaciones la **conexión** y el **contacto.** Imagínese una esfera y que en ella trazamos un **reticulado** (por ejemplo, trazando meridianos y paralelos en número finito), que determina sobre la superficie cierto número de regiones **simplemente conexas;** si deformamos de modo continuo la esfera (por modo semejante a las deformaciones que podemos hacer sufrir a una pelota de goma), la nueva superficie es homeomórfica con la primera, es decir, con la esfera, y contiene el mismo número de regiones que ésta, también simplemente conexas (8).

Si dos superficies son tangentes, se transforman por homeomorfías en superficies también tangentes.

Las proyecciones y secciones son transformaciones biunívocas y continuas y, en general, toda proyectividad es una transformación analítica, biunívoca, continua, sin excepción. En consecuencia, las proyectividades son casos particulares de las operaciones topológicas y, por ende, la Geometría Proyectiva es caso particular de la Topología.

Nota.—Entre la Topología y la Geometría Proyectiva halla su lugar la llamada Geometría Algebraica, de tanto interés actual, que es la teoría de los invariantes respecto de un grupo de operaciones llamadas **transformaciones birracionales** (9).

De la visión somera y de conjunto que hemos ofrecido de la constitución de las geometrías se deduce que cada Geometría queda definida mediante un sistema de postulados y un grupo de operaciones que, al mismo tiempo, describen un **espacio.** Así, se consideran el espacio métrico, el afín, el proyectivo, etc. Puede pasarse de un espacio a otro por la adjunción de ciertos elementos. Para ser más precisos, basta un sistema de axiomas (conjunto que recibe el nombre de Axiomática) para la definición de una geometría; asimismo, puede establecerse exclusivamente por un grupo de operaciones. Nosotros, pragmáticamente enlazamos ambas fundamentaciones para hacer resaltar los aspectos estático y dinámico de la Geometría. La Axiomática, como ha podido observar el lector, entronca con la Epistemología, y sus problemas llevan de la mano a la Filosofía Matemática.

* * *

La **Geometría Descriptiva** trata de representar sobre una superficie las figuras geométricas; superficie que generalmente (no forzosamente) es un plano, y las operaciones fundamentales de la Geometría Descriptiva son las proyecciones y secciones. Ahora bien; los **métodos** que utiliza la Geometría Descriptiva para sus fines son diversos, métodos que se conocen con el nombre de **sistemas,** y en algunos de ellos las proyecciones son de tipo particular, no esencialmente consideradas como operaciones proyectivas. Por ejemplo, en el sistema llamado de Monge o diédrico, el tipo de proyección empleado es la proyección paralela, operación afín. Otras operaciones empleadas, como los **abatimientos,** no son operaciones siempre proyectivas, sino, en ocasiones, afinidades. Sistemas hay que contienen en sus fundamentos conceptos métricos, como, por ejemplo, el sistema de planos acotados que utiliza el concepto de distancia. Incluso este concepto aparece en el propio sistema cónico y en el gnomónico (círculo de distancia). En el sistema axonométrico ortogonal, los elementos de referencia y la dirección de proyección son de contenido métrico (elementos perpendiculares). En consecuencia, la Geometría Descriptiva es una aplicación de la Proyectiva. Sus problemas generales son cuestiones proyectivas, y los particulares, problemas afines y métricos.

De esta visión general del campo de la Descriptiva y de su "modus operandi" se desprenden con evidencia las normas generales para su sistematización y para la conservación a lo largo de su desarrollo del espíritu que domina hoy en la Geometría.

Para un estudio coordinado y deductivo de la Geometría Descriptiva debe preceder un curso de Proyectiva, método seguido principalmente por los italianos; también seguido por otras naciones en los estudios puros, pero no en los técnicos y aplicados, en los que se adoptan exposiciones métricas que, por tanto, pecan por defecto, o bien siguen la escuela alemana, que consiste en introducir los conceptos proyectivos simultáneamente al planteo del problema descriptivo. Más fecundo y amplio es, sin duda, el primer procedimiento y presenta, además, la gran virtud y ventaja de la sistematización.

En la falta de sistematización es donde radica, a nuestro entender, la inseguridad que puede observarse generalmente entre los estudiantes de cursos elementales de Geometría Descriptiva; cursos que suelen ser expuestos, casi como norma general, simplemente como una colección de problemas o cuestiones particulares que no llegan a concrecionarse, para la mayor parte de los alumnos, en ideas y normas generales, y mucho menos en cuerpo de doctrina. A diferencia radical de los procedimientos que normalmente se emplean en la exposición y desarrollo de otras ramas de las Matemáticas, en donde se dan visiones completas, rigurosas, de temas generales que luego conducen a particularizaciones y problemas que el alumno resuelve con su bagaje de teoremas y su visión amplia del campo o teoría a que pertenece cada problema que trabaja.

Con el fin de lograr, hasta donde sea posible, dentro de los estrechos márgenes de un curso elemental y esencialmente aplicado, una sistematización de la Geometría Descriptiva, hemos comenzado por exponer en el Programa que en el presente curso se ha establecido en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes, unas nociones generales de Geometría Proyectiva, cuyo contenido es utilizado en el desarrollo de la materia, y al mismo tiempo la diversidad de problemas que se resuelven en cada sistema de representación los agrupamos por sus características geométricas en dos familias: Problemas Proyectivos, y Métricos, y establecemos a continuación, dentro de estos grupos clasificaciones particulares, ofreciendo métodos generales e indicando cuáles son los elementos necesarios para su resolución, y haciendo uso, además, hasta donde es posible, para los problemas proyectivos, del muy fecundo Principio de Dualidad.

Además del contenido propio, como rama o aplicación de la Proyectiva, las aplicaciones particulares de la Geometría Descriptiva son altamente interesantes y de un gran valor práctico, tales la Fotogrametría, la Perspectiva, en sus aspectos técnico y artístico, la Cartografía, la Teoría de las sombras y el claroscuro, la Teoría de Cuadrantes solares, la Estereotomía, etc., de donde resulta obvio el buen acuerdo que debe existir, en las carreras técnicas, entre el contenido de la Descriptiva, su método de desarrollo, y los cursos de Dibujo, así como en su relación con muchos aspectos de la Topografía.

Abogamos porque se logre una conjugación, para la efectividad de la enseñanza, entre los cursos de Dibujo y de Geometría Descriptiva, que de modo lamentable suelen hallarse divorciados. Nos cabe la satisfacción de que esta armonía y engranaje entre tales cursos han sido plenamente logrados en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes.

El desarrollo de la Descriptiva sobre las bases firmes y generales de la Proyectiva no sólo tiene las ventajas indicadas, sino que, además, constituye una base de conocimientos muy importantes para la exposición de temas tan fundamentales para el ingeniero, como lo son: Sistemas focales y su aplicación al cálculo de estructuras, núcleos de columnas, ejes y centros de segundo orden, propiedades de la elipse de inercia, etc.

La Geometría Proyectiva y la Descriptiva fueron siempre hermanas y, hasta durante cierto tiempo, se las denominó a ambas con el mismo nombre. Si en la actualidad los avances de la Proyectiva pueden ya calificarse de prodigiosos, lógico es tomar de ésta todos los recursos posibles para el más amplio y elegante desarrollo de aquélla y no permitir que se anquilose y hasta focilice bajo los estratos de métodos sempiternos y ya más que superados. La Universidad, además, por su espíritu y por su función debe llevar en sí constantemente el estímulo de perpetua renovación.

(1) Para algunos matemáticos, como LEVI, es condición indispensable el postular la **existencia** de los entes primitivos. Para otros, como PEANO, "la existencia de la cosa definida no es necesaria". Sobre este punto el razonamiento de PEANO es muy interesante y, entre otros ejemplos, aduce el de la definición de **derivada** que critca sagazmente: "Se si dice che la derivata é il limite (ove esista) del rapporto incrementale; qualora il limite non esista non si puó concludere que la derivata non esiste. L'ove esista va dunque soppresso, e allora la derivata e definita, ma puo esistere e non esistere. Ma se di una funzione ci occorre la derivata, é necessario supporre o dimostrare l'esistenza di essa".

(2) Decimos **intuición** en el sentido de **inducción experimental inconsciente**, resultado de un proceso de abstracción a partir de objetos y fenómenos de la realidad circundante. Al hablar de **lógica** se hace necesario no sobrevalorarla hasta el punto de confundirla con la **verdad científica**. Aquélla no es más que un medio para llegar a ésta, lo mismo que la intuición. En tanto la verdad es independiente de las posibilidades y limitaciones humanas, la lógica y la intuición tropiezan con estos límites. Por esto no puede ni debe establecerse jerarquización entre intuición y lógica; ambas juegan su papel y cumplen sus misiones específicas en la ciencia, y es lícito considerar a la **verdad** científica como de condición supralógica. Véase a este respecto: MIRET, "El hombre y sus límites personales".

(3) El concepto de **transformación** es equivalente a **operación**, **correspondencia**, **función**, **sustitución**. Ciertas operaciones reciben también el nombre de **movimientos**. No debe entenderse este concepto en el sentido físico sino sólo considerarse los estados inicial y final de la transformación, sin la intervención del concepto **tiempo**, que es extraño a la Geometría. La denominación **función**, se prefiere en el Análisis. En Geometría suelen emplearse con el mismo fin las palabras operación, transformación y correspondencia. La voz sustitución se emplea tanto en el Análisis como en la Geometría.

(4) En el desarrollo analítico de la Geometría se encuentra que las invariantes vienen expresados por determinantes. Por este motivo CAYLEY llamó **hiperdeterminantes** a los invariantes. La denominación **invariante** se debe a SYLVESTER, quien continuó los estudios iniciados y desarrollados por CAYLEY.

(5) La Métrica recibe también el nombre de Geometría Elemental .El subgrupo del equiforme, constituído por traslaciones, giros y simetrías axiales define una geometría, caso particular de la Métrica, llamada Geometría Métrica Euclídea. En ésta es invariante la **distancia**.

(6) Inicialmente la Proyectiva fue llamada Geometría de la Posición, y las propiedades proyectivas; propiedades de posición. Actualmente, la denominación de Geometría de la Posición se ha aplicado al Análisis Situs.

(7) A una elipse puede corresponder una circunsferencia y viceversa, pues la circunferencia es caso particular de la elipse. La afinidad entre elipse y círculo es particularmente interesante.

(8) Podríamos considerar particularmente como superficie un poliedro convexo y como reticulado sobre la superficie el constituído por todas las aristas. Se cumple aquí el Teorema de Euler: "Caras más vértices es igual a aristas más dos". En realidad, este teorema de la Métrica pertenece a la Topología, pues es una particularización de un teorema más general del Análisis Situs que se enuncia así: "Dada una superficie simplemente conexa, en la que α_0 es un número de puntos sobre ella, α_1 cierto número de líneas que les unen y α_2 el número de regiones simplemente conexas determinadas por estas líneas, se cumple:

$$\alpha_0 + \alpha_2 - \alpha_1 = \text{constante"}$$

(9) Las transformaciones birracionales fueron establecidas por CREMONA y son de un alto interés por su aplicación a muy diversas cuestiones, entre éstas el estudio de los puntos múltiples impropios de las curvas, en general. Un aspecto que separa a la Topología de la Geometría Algebráica y todas las otras geometrías inferiores consiste en que, desde el punto de vista analítico, las transformaciones topológicas no pueden ser expresadas algebráicamente, sino todo lo más, y no siempre, por expresiones trascendentes.