ALEPH SUB – CERO
SERIE DE DIVULGACIÓN
$\aleph_0$ 2016 - I $\aleph_0$
pp. 21- 55

ACERCA DE LA INTEGRACIÓN EN VARIABLE COMPLEJA
(About integration into complex variable)

Carlos Sánchez Chinea *

Recepción: Marzo 2016. Revisión y aceptación: Abril 2016.

Resumen. En este trabajo mostramos, partiendo del concepto de función holomorfa, los fundamentos del método de los residuos para la integración de funciones de variable compleja y su aplicación a la determinación de ciertas integrales impropias sobre el eje real.

Palabras clave. Holomorfa, analítica, integral, Cauchy, contorno, circuito, serie, convergencia, Taylor, Laurent, singularidad, esencial, inesencial, polo, residuo.

Summary. In this paper, based on the concept of holomorphic function, we show the fundamentals of the residue method for the integration of complex functions and its application to the determination of certain improper integrals on the real axis.

Keywords. Holomorphic, analytical, integral, Cauchy, edge, circuit, series, convergence, Taylor, Laurent, singularity, essential, inessential, polo, residue.

01. A modo de resumen introductorio

Si consideramos las funciones definidas en el espacio de los números complejos, esto es, funciones complejas de variable compleja

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

---

* Carlos Sánchez Chinea, es Licenciado en Ciencias Físicas y Profesor de Matemáticas de Educación Secundaria, con la Condición de Catedrático, en el Instituto de Enseñanza Secundaria “Isidro de Arcenegui y Carmona” de Marchena, Sevilla, España. Prejubilado en 2008.
casanchi.com, casanchi@gmail.com, casanchi@casanchi.com.

podemos establecer conceptos análogos a los del estudio de funciones en el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales.

Así, para un dominio conexo D del plano complejo, diremos que la función $f : D \to \mathbb{C}$ es derivable en el punto $z_0 \in D$ sii existe el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C}$$

que llamaremos *derivada de* f *en* z_0.

Asimismo, diremos que $f : D \to \mathbb{C}$ es desarrollable en serie de potencias en un punto $z_0 \in D$ si existe una serie de potencias centrada en z_0 con radio de convergencia positivo, tal que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \forall z \in D$$

Se dice que $f(z)$ es *holomorfa* en un punto $z_0 \in D$ (o que tal punto es regular respecto a la función) si $f(z)$ es derivable sucesivamente en todos los puntos de un entorno de z_0. La función es holomorfa en *D* si es holomorfa en todo punto de *D*.

Una función $f(z)$ de variable compleja es *analítica* en un abierto conexo *D* si es desarrollable en serie de potencias en todo punto de *D*.

Podemos comprobar fácilmente la equivalencia de los conceptos de holomorfía y analiticidad probando que toda función holomorfa en un dominio *D* es también analítica en *D*, ya que es posible obtener su desarrollo de Taylor en cualquier punto del dominio, y recíprocamente, toda función analítica en un dominio *D* es también holomorfa en *D*.

Si existieran puntos aislados $p_j,\ j = 1, \cdots, k$ dentro del dominio *D* en el que la función dada $f(z)$ no fuera holomorfa, tales puntos se denominarían puntos singulares para $f(z)$.

En lo que respecta a la integración de funciones de variable compleja a lo largo de un camino cerrado o circuito, el análisis dispone del fundamental teorema de Cauchy, que establece que para toda función holomorfa en un abierto conexo *D*, su integral a lo largo de un circuito Γ contenido en *D* es nula:

$$\int_{\Gamma} \phi(z)dz = 0$$

este teorema es válido también cuando dentro del interior del recinto rodeado por Γ existe un número finito de puntos singulares $p_j,\ j = 1,\cdots,k$ tales que

$$\lim_{z\to p_j} \left(z - p_j\right)\phi(z) = 0,\ j = 1,\cdots,k$$

Asimismo es una herramienta de estudio extremadamente útil el teorema de la fórmula de Cauchy, mediante el cual podemos encontrar la derivada de cualquier orden de una función holomorfa en un recinto conexo *D*, mediante una integral a lo largo de un circuito Γ contenido en *D*:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i\vartheta(\Gamma, z)} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$$

donde es ϑ un número entero positivo que se denomina índice o número de vueltas (en general es $\vartheta = 1$ para un circuito simple).
Así, obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i\vartheta} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt\ ,\ \ f'(z) = \frac{1!}{2\pi i\vartheta} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt\ ,\cdots,\ f^{n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i\vartheta} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt\ ,$$

$$\cdots$$

El instrumento de trabajo que representa la fórmula de Cauchy nos permite probar cómo una función $f(z)$ holomorfa en el dominio encerrado entre dos circunferencias concéntricas (dominio anular o corona circular), $r_2 < \left|z - z_0\right| < r_1$, es desarrollable en serie de Laurent en punto cualquiera de dicha corona:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n$$

donde es z_0 el centro de las circunferencias concéntricas que definen la corona circular. Es decir, es desarrollable como una serie infinita de términos de exponentes negativos y positivos en general.

Obviamente, si $f(z)$ fuera holomorfa en z_0 su desarrollo en serie de Laurent habría de coincidir con el de Taylor, por lo que no existirían términos de exponente negativo. En cambio, si tal punto fuera singular existiría términos del desarrollo con exponente negativo. Si el número de términos con exponente negativo fuera infinito, diremos que es una singularidad aislada esencial, y si tal número fuera finito la singularidad se denomina no esencial o polo. Veremos también que la función puede tener en tal punto una singularidad evitable, por tener límite en dicho punto, admitiendo un desarrollo de Taylor en un entorno del mismo.

El llamado Teorema de los Residuos establece que si la función $f(z)$ tiene n singularidades aisladas, $z_{01},\cdots,z_{0n}$, rodeadas por el circuito Γ contenido en el abierto conexo *D*, entonces

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_{0k})$$

donde cada término $\operatorname{Res}(f, z_{0k})$, $k = 1,...,n$ se denomina residuo de la función $f(z)$ en la singularidad z_{0k}, $k = 1,\cdots,n$.

Asimismo, el teorema permite determinar el residuo correspondiente a la singularidad en cada caso:

a) Si la singularidad aislada es evitable en z_{0k}:

$$\operatorname{Res}(f, z_{0k}) = 0$$

ya que la función se prolonga a una función holomorfa en el punto de singularidad.

b) Si la singularidad aislada es esencial en z_{0k}:

$$\operatorname{Res}(f, z_{0k}) = a_{-1}$$

donde a_{-1} es el coeficiente que figura en el término de exponente -1 del desarrollo de Laurent de la función.

c) Si la singularidad aislada es no esencial (un polo) en z_{0k}:

$$\operatorname{Res}(f, z_{0k}) = a_{-1}$$

donde a_{-1} es asimismo el coeficiente que figura en el término de exponente -1 del desarrollo de Laurent de la función. En este caso podemos establecer una fórmula que permite calcular el residuo correspondiente a un polo de orden *p*:

$$\operatorname{Re}s(f, z_{0k}) = a_{-1} = \lim_{z \to z_{0k}} \frac{d^p}{dz^p}\left[(z - z_{0k})^p f(z)\right]$$

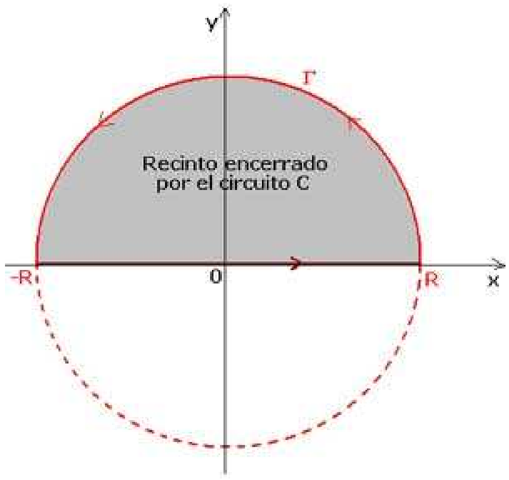
La aplicación clave del cálculo de las integrales complejas mediante la fórmula de los residuos es poder determinar la integral de una función real en el caso de integrales impropias, ya que se puede establecer un contorno cerrado del que forma parte el intervalo real de integración de la integral impropia y, por ejemplo, una semicircunferencia que complete el circuito donde se pueda aplicar el teorema de los residuos a las singularidades que queden encerradas en el mismo.

Así, por ejemplo, para el caso de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ podemos plantear, tal como indicamos en la figura siguiente, la relación

$$\oint_C f(z).dz = \int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_\Gamma f(z)dz$$

y pasando al límite:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \oint_C f(z).dz - \lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)dz$$



Carlos Sánchez Chinea

Mostramos en lo que sigue las argumentaciones más usuales que permiten justificar el método de los residuos.

02. Teorema y Fórmula de Cauchy para una función holomorfa

02.1. El Teorema de Cauchy.

Dado un abierto simplemente conexo *D* y una curva simple cerrada γ contenida en *D*, se verifica que si $f(z)$ es holomorfa en *D* con derivada continua entonces

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Demostración:
Puesto que es $z = x + iy \to dz = dx + idy$, $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$
Se tiene que

$$f(z)dz = (u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy) = \left(u(x,y)dx - v(x,y)dy\right) + i\left(u(x,y)dy + v(x,y)dx\right)$$

de lo cual

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma}\left[\left(u(x,y)dx - v(x,y)dy\right) + i\left(u(x,y)dy + v(x,y)dx\right)\right] =$$
$$= \oint_{\Gamma}\left[\left(u(x,y)dx - v(x,y)dy\right)\right] + i\oint_{\Gamma}\left[\left(u(x,y)dy + v(x,y)dx\right)\right]$$

y teniendo en cuenta la expresión del teorema de Green:

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

donde *S* es la superficie encerrada por la curva Γ, se tendrá finalmente que

$$\oint_{\Gamma} f(z).dz = \iint_S \left(-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_S \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right)dxdy$$

con lo que, aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

se tiene

$$\oint_{\Gamma} f(z).dz = \iint_S 0dxdy + i\iint_S 0dxdy = 0 + i0 = 0$$

así, pues, para toda función analítica $\phi(z)$ en un abierto simplemente conexo *D*, para todo contorno cerrado rectificable o circuito Γ contenido en *D* se verifica el teorema de Cauchy-Goursat

$$\int_{\Gamma} \phi(z)dz = 0 \qquad [2.1.1]$$

que es válido también cuando dentro del interior del recinto rodeado por Γ existe un número finito de puntos singulares $p_j,\ j = 1, \cdots, k$ tales que es

$$\lim_{z \to p_j} \left(z - p_j\right)\phi(z) = 0,\ j = 1, \cdots, k \qquad [2.1.2]$$

02.2. La Fórmula de la Integral de Cauchy.

Así, por ejemplo, la función $\varphi(z) = 1/z - z_0$ tiene un único punto singular en $z = z_0$, pero tal punto singular no cumple la condición anterior, pues es

$$\lim_{z \to z_0} \left(z - z_0\right)\frac{1}{z - z_0} = 1 \neq 0$$

En cambio, si $f(z)$ es función analítica en el recinto *D*, se tiene que la función $\phi(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ si verifica dicha condición, ya que

$$\lim_{z \to z_0} \left(z - z_0\right)\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0$$

y por tanto, en el recinto indicado y para el contorno cerrado rectificable Γ se verificará el teorema de Cauchy-Goursat:

$$\oint_{\Gamma} \phi(z)dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz = 0 \qquad [2.2.1]$$

en cambio, para la función $\varphi(z)$ anteriormente indicada, al no cumplir la hipótesis del teorema de Cauchy-Goursat, la integral de contorno no es nula. Calculémos la:

$$\oint_\Gamma \varphi(z)dz = \oint_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_{t_0}^{t} \frac{z'(t)dt}{z(t)-z_0} = L\left(\frac{z(t)-z_0}{z(t_0)-z_0}\right)$$

llamando $h(t)$ al resultado, se tiene

$$h(t) = L\left(\frac{z(t)-z_0}{z(t_0)-z_0}\right) \to e^{h(t)} = \frac{z(t)-z_0}{z(t_0)-z_0} = 1$$

ya que al tratarse de un recinto cerrado es $z(t) = z(t_0)$.

Esto nos indica que $e^{h(t)} = e^{2\pi i\vartheta} = 1$, por lo que $h(t) = 2\pi i\vartheta$, de donde

$$\oint_\Gamma \varphi(z)dz = \oint_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i\vartheta \qquad [2.2.2]$$

donde el número natural $\vartheta = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \dfrac{dz}{z-z_0}$ depende obviamente del contorno cerrado rectificable Γ y del punto z_0, por lo que se le acostumbra a llamar *índice* del punto z_0 respecto al contorno Γ, o bien, *número de vueltas* de Γ alrededor de z_0, pudiéndose representar por $\vartheta(\Gamma, z_0)$ para indicar esta dependencia.

De [2.2.1]:

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)\oint_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = 0$$

y usando el resultado [2.2.2]:

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)2\pi i\vartheta(\Gamma, z_0) = 0 \to f(z_0) = \frac{1}{2\pi i\vartheta(\Gamma, z_0)}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

O sea:
El valor de la función holomorfa *f* en un punto z_0 del abierto simple conexo *D* puede expresarse sobre un circuito Γ que contenga en su interior a z_0 mediante la siguiente fórmula (fórmula simple de Cauchy):

Acerca de la integración en variable compleja

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i\vartheta(\Gamma,z_0)}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz \qquad [2.2.3]$$

donde $\vartheta(\Gamma,z_0)$ es el número de vueltas o índice del circuito Γ alrededor de z_0. En general, para un circuito simple, consideraremos que es la unidad ($\vartheta(\Gamma,z_0)=1$).

La fórmula de Cauchy para la derivada *n*-sima:

Veamos a continuación que toda función holomorfa $f(z)$ en un abierto conexo D admite derivadas de cualquier orden.

Teorema:
Sea $\varphi(t)$ continua en el camino Γ. Entonces la función

$$F_n(z)=\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{(t-z)^n}dt$$

es holomorfa en el complemento de Γ, siendo su derivada $F'_n(z)=nF_{n+1}(z)$.

Demostración:

Empleamos inducción. Probemos que se verifica para *n*=1, para, a continuación, probar que si es cierta para *n*-1 también lo será para *n*.

- Para *n*=1:
  La continuidad:

Consideremos un punto z_0 cualquiera del complemento de Γ y sea d la distancia desde z_0 a Γ, de modo que para una bola $B(z_0;d)$ de centro en z_0 y radio d se tiene que es $B(z_0;d)\cap\Gamma=\varphi$.
Será entonces $\forall t\in\Gamma, |t-z_0|>d/2$, asimismo $|t-z|>d/2, \forall z\in B(z_0;d/2)$, y obviamente también es $|z-z_0|<d$. Entonces:

$$|F_1(z)-F_1(z_0)|=\left|\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-z}dt-\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-z_0}dt\right|=\left|\int_\Gamma\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-z_0}\right)\varphi(t)dt\right|=$$

$$=\left|\int_\Gamma \left(\frac{z-z_0}{(t-z)(t-z_0)}\right)\varphi(t)dt\right| = \left|(z-z_0)\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{(t-z)(t-z_0)}dt\right| <$$

$$< |z-z_0|\int_\Gamma \left|\frac{\varphi(t)}{(t-z)(t-z_0)}dt\right| < |z-z_0|\frac{4}{d^2}\int_\Gamma |\varphi(t)||dt|$$

Es decir, cuando $|z-z_0| \to 0$ también $|F_1(z)-F_1(z_0)| \to 0$. $F_1(z)$ es continua en z_0.

La derivada:

De ser

$$\frac{F_1(z)-F_1(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{z-z_0}\int_\Gamma \left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-z_0}\right)\varphi(t)dt = \frac{1}{z-z_0}\int_\Gamma \frac{z-z_0}{(t-z)(t-z_0)}\varphi(t)dt$$

$$= \int_\Gamma \frac{1}{(t-z)(t-z_0)}\varphi(t)dt$$

Se tiene:

$$F'_1 = \lim_{z\to z_0}\frac{F_1(z)-F_1(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\int_\Gamma \frac{1}{(t-z)(t-z_0)}\varphi(t)dt = \int_\Gamma \frac{1}{(t-z_0)^2}\varphi(t)dt = F_2$$

- Sea cierta para *n*-1 y comprobemos que en tal caso lo será también para *n*:

La continuidad:

Puesto que es:

$$(t-z_0)^n-(t-z)^n = (t-z_0)^{n-1}(t-z_0)-(t-z)^n = \left[(t-z)+(z-z_0)\right](t-z_0)^{n-1}-(t-z)^n$$

$$= (t-z)(t-z_0)^{n-1}+(z-z_0)(t-z_0)^{n-1}-(t-z)^n$$

será:

$$\frac{1}{(t-z)^n}-\frac{1}{(t-z_0)^n} = \frac{(t-z_0)^n-(t-z)^n}{(t-z_0)^n(t-z)^n} = \frac{(t-z)(t-z_0)^{n-1}}{(t-z_0)^n(t-z)^n}-\frac{(t-z)^n}{(t-z_0)^n(t-z)^n}$$

$$+(z-z_0)\frac{(t-z_0)^{n-1}}{(t-z_0)^n(t-z)^n} = \frac{1}{(t-z_0)(t-z)^{n-1}}-\frac{1}{(t-z_0)^n}+(z-z_0)\frac{1}{(t-z_0)(t-z)^n}$$

Por tanto:

$$F_n(z)-F_n(z_0) = \int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{(t-z)^n}dt-\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{(t-z_0)^n}dt = \int_\Gamma \left(\frac{1}{(t-z)^n}-\frac{1}{(t-z_0)^n}\right)\varphi(t)dt$$

$$= \int_\Gamma \left[\frac{1}{(t-z_0)(t-z)^{n-1}} - \frac{1}{(t-z_0)^n} \right] \varphi(t)dt + (z-z_0)\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{(t-z_0)(t-z)^n}dt$$

observamos que cuando $z \to z_0$ la primera integral tiende a cero, y puesto que $z - z_0$ está acotado en un entorno de z_0, también tiende a cero la segunda. $F_n(z)$ es continua en z_0.

La derivada:

$$F_n'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{F_n(z) - F_n(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{z-z_0} \int_\Gamma \left[\frac{1}{(t-z_0)(t-z)^{n-1}} - \frac{1}{(t-z_0)^n} \right] \varphi(t)dt$$

$$+ \lim_{z\to z_0} \int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{(t-z_0)(t-z)^n}dt = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{z-z_0} \int_\Gamma \left[\frac{\varphi(t)/t-z_0}{(t-z)^{n-1}} - \frac{\varphi(t)/t-z_0}{(t-z_0)^{n-1}} \right] dt$$
$$+ \lim_{z\to z_0} \int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{(t-z_0)(t-z)^n}dt$$

Si llamamos

$$\int_\Gamma \frac{\varphi(t)/t-z_0}{(t-z)^{n-1}}dt = f_{n-1}(z)$$

será:

$$f_{n-1}(z_0) = \int_\Gamma \frac{\varphi(t)/t-z_0}{(t-z_0)^{n-1}}dt$$

y

$$f_n(z_0) = \int_\Gamma \frac{\varphi(t)/t-z_0}{(t-z_0)^n}dt = \int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt = F_{n+1}(z_0)$$

de donde:

$$F_n'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{z-z_0}\left[f_{n-1}(z) - f_{n-1}(z_0) \right] + \int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt = f'_{n-1}(z_0) + F_{n+1}(z_0)$$

y como, por hipótesis de inducción, es

$$f'_{n-1}(z_0) = (n-1) f_n(z_0)$$

Se tendrá, finalmente:

$$F'_n(z_0) = (n-1) f_n(z_0) + F_{n+1}(z_0) = (n-1)F_{n+1}(z_0) + F_{n+1}(z_0) = nF_{n+1}(z_0)$$

Lo que prueba la inducción.

Corolario (Formula de la integral de Cauchy para la derivada n-sima):
Toda función holomorfa $f(z)$ en un abierto conexo D admite derivadas de cualquier orden que son también holomorfas.
Para cualquier punto $z \in D$, y para cualquier ciclo Γ homológico a cero módulo *D*, tal que $\vartheta(\Gamma, z) \neq 0$ se verifica que

$$f^{n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i \vartheta(\Gamma, z)} \oint_\Gamma \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$$

En efecto:

Si llamamos $f_k(z) = \dfrac{1}{2\pi i \vartheta(\Gamma, z)} \oint_\Gamma \dfrac{f(t)}{(t-z)^k} dt$, $k = 1, \cdots, n, \cdots$

se tiene, partiendo de la fórmula de Cauchy [2.2.3]:

$$f(z) \equiv f_1(z) = \frac{1}{2\pi i \vartheta(\Gamma, z)} \oint_\Gamma \frac{f(t)}{t-z} dt$$

$$f'(z) \equiv f_1'(z) = 1.f_2(z) = \frac{1}{2\pi i \vartheta(\Gamma, z)} \oint_\Gamma \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt$$

$$f''(z) = (1.f_2(z))' = 2f_3(z) = \frac{2}{2\pi i \vartheta(\Gamma, z)} \oint_\Gamma \frac{f(t)}{(t-z)^3} dt$$

$$f'''(z) = (2.f_3(z))' = 2.3.f_4(z) = \frac{2.3}{2\pi i \vartheta(\Gamma, z)} \oint_\Gamma \frac{f(t)}{(t-z)^4} dt$$

... ...

... ...

$$f^{n)}(z) = (2...n-1.f_n(z))' = 2.3...n.f_{n+1}(z) = \frac{2.3...n}{2\pi i \vartheta(\Gamma, z)} \oint_\Gamma \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$$

En definitiva:

$$f^{n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i \vartheta(\Gamma, z)} \oint_\Gamma \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt \qquad [2.2.4]$$

que es lo que denominamos fórmula de Cauchy para la derivada *n*-sima.

03. Equivalencia entre holomorfía y analiticidad

Vamos a comprobar que toda función holomorfa en un abierto conexo es también analítica, esto es, desarrollable en serie de Taylor. La afirmación recíproca es inmediata pues toda potencia es derivable y por tanto una suma de potencias también es derivable, es decir, toda función desarrollable en suma de potencias es una función holomorfa.

03.1. Desarrollo en serie de Taylor para una función holomorfa

Teorema:
Para toda función compleja $f(z)$, holomorfa en un abierto conexo *D*, se verifica que $\forall z_0 \in D$ existe una serie formal $S(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ tal que

$$f(z) = S(z - z_0),\ \forall z \in B(z_0; r), \forall r > 0 / B(z_0; r) \subseteq D$$

Demostración:
Llamemos $F(D)$ a la frontera del abierto conexo. $\forall z_0 \in D$, sea $d = d(z_0, F(D))$ la distancia de z_0 a dicha frontera. Se tiene que $\forall z \in B(z_0, r) \subseteq D \to d(z, z_0) < d$, y además $\exists r' > 0 / 0 < d(z, z_0) < r' < d$.
Consideremos la bola $B(z_0, r')$ y su frontera $F(B(z_0, r'))$. Si es *C* el ciclo definido por dicha frontera, $C = F(B(z_0, r'))$, será el número de vueltas a z_0: $\vartheta(C, z) = 1$.
Por tanto, al considerar la fórmula de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i \vartheta(C, z)} \oint_C \frac{f(u)}{u - z} du = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{u - z} du$$

se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{u - z} du = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{(u - z_0) - (z - z_0)} du = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{u - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{u - z_0}} du$$

[3.1.1]

por ser $u \in C$ será $|u - z_0| > |z - z_0| \to \left|\frac{z - z_0}{u - z_0}\right| < 1$, con lo cual vemos que el término $\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{u - z_0}}$ que figura en la integral es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de primer término la unidad y razón $\frac{z - z_0}{u - z_0}$ tal que $\left|\frac{z - z_0}{u - z_0}\right| < 1$.

(es el caso de $1 + x + x^2 + ... = 1/_{1-x}$, si $|x| < 1$)

por consiguiente $\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{u - z_0}} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z - z_0}{u - z_0} \right)^n$, y la integral [3.1.1] puede expresarse así:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{u - z_0} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z - z_0}{u - z_0} \right)^n du = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{n \geq 0} \frac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}} f(u) du$$

la cual queda, integrando término a término:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du$$

y de la fórmula de Cauchy para la derivada n-sima $\left(f^{n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du \right)$

se tiene finalmente que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{n)}(z)}{n!} (z - z_0)^n$$

que es el desarrollo de Taylor de la función holomorfa $f(z)$.

Podemos encontrar una expresión integral para tal suma infinita mediante un teorema fundamental conocido como *teorema del resto de Taylor* o simplemente *teorema de Taylor*.

-Teorema de Taylor
Teorema:

$\forall z_0 \in D, \forall n \in N, \forall z \in B(z_0; r), \forall r > 0$, tal que $B(z_0; r) \subseteq D$, se verifica:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k+\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(u)}{u-z}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^{n+1}du$$

siendo C la circunferencia de radio r' y centro z_0 tal que

$$z_0\in B(z_0;r'),\ B(z_0;r')\subseteq D$$

Demostración:
Podemos expresar el desarrollo de Taylor en la forma

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{k)}(z)}{k!}(z-z_0)^k+R_n(z)$$

Donde $R_n(z)$ es la suma de los términos que van desde el n+1-esimo en adelante, y que llamaremos *Resto n-simo de la serie*.

$$R_n(z)=\sum_{k\geq n+1}\frac{f^{k)}(z)}{k!}\left(z-z_0\right)^k=\sum_{k\geq n+1}\left(z-z_0\right)^k\frac{f^{k)}(z)}{k!}=\sum_{k\geq n+1}\left(z-z_0\right)^k\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(u)}{(u-z_0)^{k+1}}du=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(u)}{u-z_0}\sum_{k\geq n+1}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^k du \qquad [3.1.2]$$

y aplicando nuevamente la expresión que da la suma infinita de primer término $\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^{n+1}$ y razón $\frac{z-z_0}{u-z_0}$, se tiene:

$$\sum_{k\geq n+1}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^k=\frac{\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^{n+1}}{1-\frac{z-z_0}{u-z_0}}=\frac{u-z_0}{u-z}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^{n+1}$$

por lo que, al sustituir en [3.1.2]:

$$R_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(u)}{u-z_0}\frac{u-z_0}{u-z}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^{n+1}du=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(u)}{u-z}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^{n+1}du$$

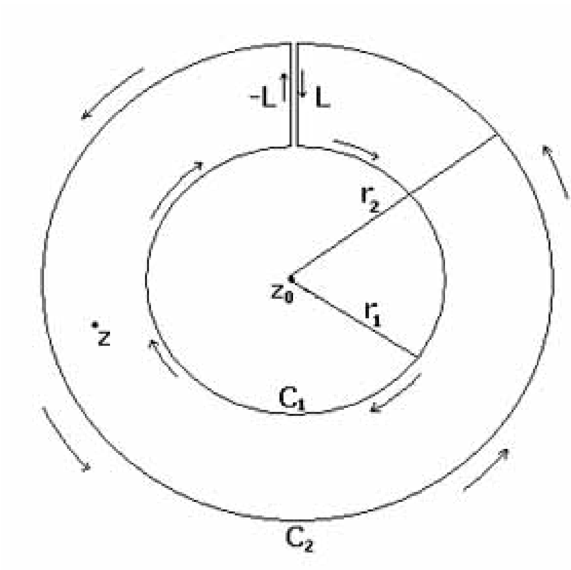
finalmente:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k+\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(u)}{u-z}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^{n+1}du$$

En definitiva, toda función holomorfa es desarrollable en serie de Taylor, es decir, es analítica.

Recíprocamente, toda función analítica, esto es, desarrollable en serie de potencias, es obviamente derivable, luego es también holomorfa.

04. Desarrollo en serie de Laurent



Consideremos una función $f(z)$ compleja de variable compleja. Consideremos también el circuito Γ de la figura, constituido por dos circunferencias, C_1 y C_2, concéntricas, de centro en z_0 y radios r_1 y r_2 $(r_1<r_2)$, y dos tramos rectílineos tan próximos como se quiera, L y $-L$, que unen a ambas circunferencias cerrando el contorno. Aplicamos la Fórmula de Cauchy para encontrar el valor de la función en un punto z rodeado por el contorno indicado.

$$\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\oint_{L}\frac{f(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\oint_{-C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\oint_{-L}\frac{f(t)}{t-z}dt\\
&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\oint_{L}\frac{f(t)}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\oint_{L}\frac{f(t)}{t-z}dt\\
&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt
\end{aligned}$$

Se tiene:

Acerca de la integración en variable compleja

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)-(z-z_0)}dt-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(t-z_0)-(z-z_0)}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{t-z_0}\right)}dt-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(z-z_0)\left(\dfrac{t-z_0}{z-z_0}-1\right)}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{t-z_0}\right)}dt+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(z-z_0)\left(1-\dfrac{t-z_0}{z-z_0}\right)}dt$$

En la integral primera, sobre el arco C_2, se tiene que

$$|t-z_0|>|z-z_0|\to\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right|<1\to\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{t-z_0}}=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n,\ \forall t\in C_2$$

Mientras que en la integral segunda, sobre el arco C_1, es

$$|z-z_0|>|t-z_0|\to\left|\frac{t-z_0}{z-z_0}\right|<1\to\frac{1}{1-\dfrac{t-z_0}{z-z_0}}=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n,\ \forall t\in C_1$$

Y sustituyendo

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n dt+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(z-z_0)}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n dt+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(z-z_0)}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^{-n} dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^{-n-1}\oint_{C_1}f(t)(t-z_0)^n dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}(z-z_0)^{-n}\oint_{C_1}f(t)(t-z_0)^{n-1} dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-z_0)^n\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt$$

como las integrales no dependen del camino de integración, podemos elegir una circunferencia *C* comprendida entre ambas C_1 y C_2:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_C\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-z_0)^n\oint_C\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_C\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt\right](z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

siendo

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt,\;\; n=-\infty,\cdots,-1,0,1,\cdots,\infty$$

En definitiva, el desarrollo o expansión de una función $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, analítica en un punto cualquiera z del dominio anular $D=\left\{z\in C/r_1<\left|z-z_0\right|<r_2\right\}$ viene dada por

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n$$

Donde los coeficientes pueden obtenerse mediante las integrales de contorno

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt,\;\; n=-\infty,\cdots,-1,0,1,\cdots,\infty$$

siendo *C* una circunferencia concéntrica con las dadas y contenida en el dominio anular *D*.

La determinación de la expansión de una función en serie de Laurent en un dominio *D*, necesita por tanto el cálculo de los correspondientes coeficientes a_n, lo cual, por exigir la resolución de integrales de una cierta complicación, presenta en general una gran dificultad. Esto hace que en la práctica sea preferible el empleo de métodos algebraicos y algebraico-diferenciales elementales para determinar tales coeficientes, como el desarrollo mediante el binomio de Newton, la serie geométrica, el desarrollo de Taylor, etc.

A fin de ilustrar esta dificultad veamos a continuación un ejemplo en el que obtenemos el desarrollo en serie de Laurent de una función de dos maneras: primero realizando el cálculo de sus coeficientes mediante las integrales de contorno anteriores, y segundo, mediante un desarrollo elemental en el que empleamos la serie geométrica.

Sea la función $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ en el dominio $D:0<\left|z\right|<1$. Veamos la obtención del desarrollo de Laurent en $z=0$.

Acerca de la integración en variable compleja

a) Primer procedimiento: Calculando las integrales de contorno de la definición:
Como el dominio D es un disco perforado de radio 1, utilizaremos como contorno la circunferencia centrada en 0 de radio ½:
$C: z=\frac{1}{2}e^{ti},\ 0\le t\le 2\pi$. Los coeficientes estarán dados por

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{(t-0)^{n+1}}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1/t(t-1)}{t^{n+1}}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1/(t-1)}{t^{n+2}}dt,\ \ n=-\infty,\cdots,-1,0,1,\cdots,\infty$$

Veamos como obtener todos los coeficientes del desarrollo:

- Para $n\le -2\to n+2\le 0$: $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1/(t-1)}{t^{n+2}}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{t^{-(n+2)}}{(t-1)}dt=0$, pues la función del integrando es analítica en el interior del contorno C.

- Para $n=-1\to n+2=1$: $a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1/(t-1)}{t}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1/(t-1)}{t-0}dt$, por lo que,

llamando $g(t)=1/(t-1)$ y aplicando la fórmula de Cauchy:

$$g(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{g(t)}{t-0}dt\to\frac{1}{0-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{g(t)}{t-0}dt\to a_{-1}=g(0)=-1$$

- Para $n>-1\to n+2>1$: $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1/(t-1)}{t^{n+2}}dt$, por lo que, empleando la fórmula de Cauchy para la derivada n-sima, se tiene:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1/t(t-1)}{(t-0)^{n+1}}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1/(t-1)}{(t-0)^{n+2}}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{g(t)}{(t-0)^{n+2}}dt=\frac{g^{n+1)}(0)}{(n+1)!}$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left(\frac{1}{z-1}\right)\Bigg|_{z=0}=\frac{(n+1)!}{(n+1)!}.(-1)^{n+1}.\frac{1}{(z-1)^{n+2}}\Bigg|_{z=0}=-1$$

En definitiva, el desarrollo de Laurent será:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-0)^n=\sum_{n=-\infty}^{-2}a_n(z-0)^n+a_{-1}(z-0)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-0)^n$$

$$= ... + 0 + (-1)(z-0)^{-1} + (-1)(z-0)^{0} + (-1)(z-0)^{1} + (-1)(z-0)^{2} + \cdots$$
$$= -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - ... = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$$

b) Segundo procedimiento: Utilizando la serie geométrica:

De ser $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)} = \dfrac{-1}{z} + \dfrac{1}{z-1}$, se tiene que como es $|z| < 1$, el opuesto del segundo sumando es la suma de la serie geométrica de razón menor que la unidad en valor absoluto:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{, con lo cual } f(z) = \frac{-1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$$

Que es el mismo resultado obtenido antes usando las integrales de contorno. Queda, pues, patente la diferente dificultad entre uno y otro de ambos procedimientos de resolución del problema.

05. Clasificando singularidades

Consideremos un punto z_0 y el disco de centro en z_0 y radio r. Si una función $f(z)$ es holomorfa en el interior de dicho disco salvo en su centro z_0, diremos que es holomorfa en el disco perforado $0 < |z - z_0| < r$.

Puede ser que la función $f(z)$ puede prolongarse a una función holomorfa, es decir, a una función desarrollable en serie de Taylor en todo el disco completo, $|z - z_0| < r$ o bien puede que no sea posible tal prolongación. En este último caso diremos que z_0 es una *singularidad aislada* de la función $f(z)$.

La prolongación de una función holomorfa en un disco perforado al disco completo puede caracterizarse mediante un sencillo teorema que mostramos a continuación.

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que una función holomorfa en un disco perforado $0 < |z - z_0| < r$ sea prolongable a una función holomorfa en el disco completo es que esté acotada en un entorno del centro z_0 del disco.
Demostración:

Acerca de la integración en variable compleja

Si $f(z)$ es prolongable a una función $g(z)$ holomorfa en el punto z_0, esto es, en el disco completo, ello quiere decir que es derivable y por tanto continua en z_0. Lo que implica que es continua en dicho punto y, por tanto acotada. Por la continuidad, también está acotada en un entorno del mismo.

Y al revés, si $f(z)$ está acotada en un entorno del punto z_0, entonces

$$\exists M \in R / \left| f(z) \right| \leq M \text{ en } C\text{: } \left| z - z_0 \right| = r_1 < r$$

por tanto, si consideramos el desarrollo de Laurent de la función:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ , siendo } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = -\infty, \cdots, -1, 0, 1, \cdots + \infty$$

se tiene:

$$\left| a_n \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi i} \oint_c \left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \right| \left| dz \right| \leq \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{M}{r^{n+1}} \left| dz \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{M}{r^{n+1}} \oint_c \left| dz \right| = \frac{1}{2\pi i} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r i = \frac{M}{r^n}$$

o sea:

$$\left| a_n \right| \leq \frac{M}{r^n}$$

Esto indica que para valores de *n* negativos y para *r* suficiente pequeño se tendrá que $\left| a_n \right| \to 0$ por lo que $a_n = 0$. Es decir, son nulos todos los términos de exponente negativo, lo que indica que el desarrollo de Laurent es simplemente un desarrollo de Taylor y la función es, por tanto holomorfa:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

En definitiva, una función $f(z)$ que es acotada en un entorno de z_0 puede prolongarse de forma holomorfa al disco completo, esto es, siempre es desarrollable en serie de Taylor en z_0.

Si una función no puede prolongarse a una función holomorfa en el disco completo, es decir, si no puede desarrollarse en serie de Taylor en el punto z_0 se debe a que existen términos de exponente negativo en su desarrollo de Laurent que no son nulos.

Pueden darse dos casos: que el número de términos de exponente negativo sea infinito, o bien, que tal número sea finito.

Si el desarrollo de Laurent tiene infinitos términos de exponente negativo, la singularidad aislada que presenta z_0 es lo que llamamos una *singularidad esencial*.

Si el desarrollo de Laurent tiene solo un número finito de términos con exponente negativo, $a_{-h}(z-z_0)^{-h}+...+a_{-h}(z-z_0)^{-(h+k)}$, será expresable en la forma

$$\begin{aligned} f(z) &= a_{-h}(z-z_0)^{-h}+\cdots+a_{-h}(z-z_0)^{-(h+k)}+\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n \\ &= \frac{a_{-h}}{(z-z_0)^h}+\cdots+\frac{a_{-h}}{(z-z_0)^{h+k}}+\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

por lo que existirá un número entero positivo $q \geq h+k$ tal que

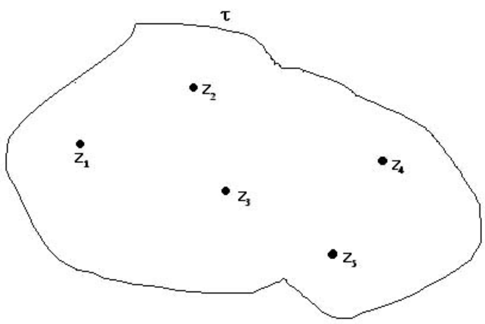
$$(z-z_0)^q f(z) = a_{-h}(z-z_0)^{q-h}+\cdots+a_{-h}(z-z_0)^{q-(h+k)}+\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^{n+q}$$

es un desarrollo en serie donde todos los términos tienen ahora exponente no negativo, o sea, un desarrollo de Taylor, lo que indica que $(z-z_0)^q f(z)$ es holomorfa. Se dice entonces que z_0 es *un polo de orden* q, donde q es el mínimo entero positivo que verifica la igualdad anterior.

06. Residuos y el cálculo de integrales

06.1. Residuos:

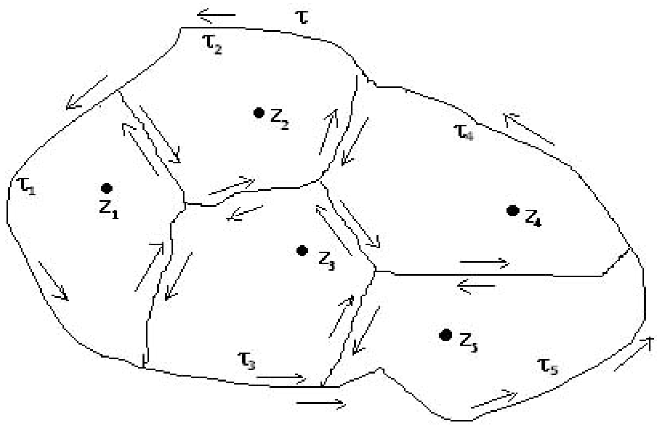
Sea D un dominio simplemente conexo y consideremos la integral de una función $f(z)$ a lo largo de un circuito τ que rodea un numero finito de singularidades aisladas, $z_i, \quad i = 1,2,...,n$.



Acerca de la integración en variable compleja

Puesto que cada una de las singularidades puede rodearse por un contorno $\tau_1, \tau_1, ..., \tau_n$ de modo que la integral en el contorno total sea la suma de los contornos correspondientes a cada singularidad, al cancelarse los tramos interiores:

$$\oint_{\tau} f(z)dz = \oint_{\tau_1} f(z)dz + \oint_{\tau_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{\tau_n} f(z)dz$$



Calculemos cada uno de los sumandos integrales:

$$\oint_{\tau_i} f(z).dz, i = 1,2,...,n$$

para ello sustituimos la función por su desarrollo de Laurent en un entorno de la singularidad correspondiente, z_i, $i = 1, 2, \cdots, n$:

$$\oint_{\tau_i} f(z)dz = \oint_{\tau_i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^i (z - z_i)^k dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^i \oint_{\tau_i} (z - z_i)^k dz \qquad [6.1.1]$$

Veamos el valor que puede tomar la integral. Para ello expresamos el integrando en la forma módulo argumental: $z - z_i = Re^{i\theta}$, $dz = Rie^{i\theta} d\theta$, donde es R el radio de una circunferencia centrada en la singularidad z_i y rodeada por el circuito τ_i. Se tiene:

$$\oint_{\tau_i} (z - z_i)^k dz = \int_0^{2\pi} R^k e^{ik\theta} Rie^{i\theta} d\theta = R^{k+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\theta} d\theta$$

Evaluemos esta integral para los diferentes valores de *k*:

- Si $k+1=0 \rightarrow k=-1 \rightarrow \oint_{\tau_i} (z-z_i)^k dz = R^0 i \int_0^{2\pi} e^{i.0.\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$
- Si $k+1 \neq 0 \rightarrow \oint_{\tau_i} (z-z_i)^k dz = R^{k+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\theta} d\theta = R^{k+1} i \left. \frac{e^{i(k+1)\theta}}{(k+1)i} \right|_0^{2\pi} = R^{k+1} \frac{1-1}{k+1} = 0$

En definitiva, la integral es nula salvo para *k*=-1:

$$\oint_{\tau_i} (z-z_i)^{-1} dz = 2\pi i$$

por lo que, al sustituir en [1]:

$$\oint_{\tau_i} f(z)dz = \oint_{\tau_i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^i (z-z_i)^k dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^i \oint_{\tau_i} (z-z_i)^k dz = a_{-1}^i 2\pi i$$

denominándose residuo de la función $f(z)$ en z_i al valor a_{-1}^i, y la integral de contorno total alrededor de las *n* singularidades es

$$\oint_{\tau} f(z).dz = \oint_{\tau_1} f(z)dz + \oint_{\tau_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{\tau_n} f(z)dz = (a_{-1}^1 + a_{-1}^2 + ... + a_{-1}^n) 2\pi i$$

En definitiva, es importante realizar el cálculo de los residuos de la función en los puntos donde hay singularidades aisladas a fin de obtener la integral de contorno correspondiente.

Representaremos el residuo a_{-1}^i de $f(z)$ en el punto z_i por

$$\operatorname{Re} s(f(z), z_i) = a_{-1}^i,\ i = 1, \cdots, n$$

06.2. Cálculo de los residuos en singularidades aisladas:

a) En una singularidad evitable:

Si la función $f(z)$ tiene en una singularidad evitable en z_0, es decir, si tiene límite en dicho punto, entonces es prolongable a una función holomorfa en z_0 por lo que es desarrollable en serie de Taylor y todos los términos de su desarrollo son de exponente positivo, o sea, no existe el término de exponente -1 y por consiguiente el residuo es cero.

$$\mathrm{Res}(f(z), z_0) = 0$$

b) En una singularidad esencial:

En una singularidad esencial existen, por definición, infinitos términos de exponente negativo en su desarrollo, por lo que el cálculo del residuo exige la determinación directa del coeficiente del término de exponente -1. Necesariamente, por tanto, es preciso calcular en el desarrollo $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, el coeficiente a_{-1}.

$$\mathrm{Res}(f(z), z_0) = a_{-1}$$

c) En una singularidad no esencial (polo):

En este caso podemos utilizar una sencilla fórmula que nos permite calcular mediante un límite, el coeficiente a_{-1} del desarrollo de Laurent. Sea $f(z)$ una función que tiene una singularidad no esencial, un polo de orden h, en el punto z_0. Se puede expresar en la forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^h}$$

donde la función $g(z)$ es holomorfa en un entorno de z_0 y h es la multiplicidad del polo.

Como es $g(z)$ holomorfa, puede desarrollarse en serie de Taylor en un entorno de la singularidad

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

siendo, entonces

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-h}$$

y la integral

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-h}dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k)}(z_0)}{k!} \oint_C (z-z_0)^{k-h}dz$$

y como el desarrollo es nulo, salvo para $k-h=-1$, se tiene:

$$\oint_C f(z)dz = \frac{g^{h-1)}(z_0)}{(h-1)!} \oint_C (z-z_0)^{-1}dz = \frac{g^{h-1)}(z_0)}{(h-1)!} 2\pi i$$

en definitiva:

$$\left.\begin{array}{l} \oint_C f(z)dz = a_{-1} 2\pi i \\ \oint_C f(z)dz = \dfrac{g^{h-1)}(z_0)}{(h-1)!} 2\pi i \end{array}\right\} \to a_{-1} = \frac{g^{h-1)}(z_0)}{(h-1)!} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{dz^{h-1}} g(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{dz^{h-1}} (z-z_0)^h f(z)$$

es decir, el residuo correspondiente a un polo de orden h de la función $f(z)$ en el punto z_0 es:

$$\mathrm{Re}\, s(f(z), z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{dz^{h-1}} (z-z_0)^h f(z)$$

Ejemplos:

Ejemplo de cálculo de residuos en una singularidad evitable:

La función $f(z) = \dfrac{senz}{z}$ presenta una singularidad en $z=0$. Como también es $senz = 0$, se da la conocida indeterminación $\dfrac{0}{0}$ que acostumbramos a resolver mediante la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{z\to 0} \frac{senz}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{d}{dz} senz}{\frac{d}{dz} z} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{1} = \cos 0 = 1$$

Por tanto, tiene límite 1. O sea, en $z=0$ aparece una singularidad en la que la función $f(z)$ tiene límite. Esto quiere decir que se trata de una singularidad evitable y, por consiguiente, al tener desarrollo en serie de Taylor, tiene todos los términos con exponente no negativo. Es decir, el residuo a_{-1}, que correspondería al exponente -1, es nulo:

Acerca de la integración en variable compleja

$$\operatorname{Re}s(f(z),0)=0$$

Ejemplo de cálculo de residuos en una singularidad esencial:

Sea la función $f(z)=e^{1/z}$ (exponencial de exponente 1/*z*).
Presenta el problema de que para $z\to 0$ la función se hace infinita. Para ver que su desarrollo en serie tiene infinitos términos de exponente negativo, veamos el desarrollo de Taylor de e^z:

$$e^z=\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{e^0}{n!}(z-0)^n=\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

Veamos lo mismo para $e^{1/z}$:

$$e^{1/z}=\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}$$

El residuo correspondería al coeficiente del término de exponente -1, es decir, al término que se obtiene para *n*=1: $a_{-1}=\frac{1}{1!}=1$. Por tanto:

$$\operatorname{Re}s(f(z),0)=1$$

Ejemplo de cálculo de residuos en una singularidad no esencial:
Podemos considerar la función $f(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z+3)^2}$, que nos presenta un polo simple en *z*=1 y un polo doble en *z*=-3.

Residuos:

$$\operatorname{Re}s(f(z),1)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(1-1)!}\frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}}(z-1)^1\frac{z^2}{(z-1)(z+3)^2}=\lim_{z\to 1}\frac{z^2}{(z+3)^2}=1/16$$

$$\operatorname{Re}s(f(z),-3)=\lim_{z\to -3}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}(z+3)^2\frac{z^2}{(z-1)(z+3)^2}=\lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z-1)}=15/16$$

06.3. Integrales:

Para un circuito simple γ que encierra un conjunto de singularidades aisladas, $z_1,\cdots,z_n$, se verifica que

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{n} a_{-1}^{j}$$

donde son $a_{-1}^{1},\cdots,a_{-1}^{n}$ los residuos correspondientes a las *n* singularidades aisladas encerradas por el contorno.

Ejemplos elementales:

- En el disco $|z|\le 1$es $\oint_C \frac{senz}{z}dz = 0, \quad si\ C:|z|=1,$ pues la función es holomorfa en el disco $|z|\le 1$, y por tanto la curva *C* no encierra ninguna singularidad.

- En el disco $|z|\le 2$ es $\oint_C e^{\frac{1}{z}}dz = 2\pi i, \quad si\ C:|z|=1,$ pues en el disco $|z|\le 2$ la función tiene una singularidad esencial en $z=0$ de residuo 1.

- En el dominio anular $1/2 \le |z| \le 3$ es $\oint_C e^{\frac{1}{z}}dz = 0, \quad si\ C:|z|=1$, pues en tal dominio anular la curva *C* no encierra ninguna singularidad.

- En el disco $|z|\le 2$ es $\oint_C \frac{z^2}{(z-1)(z+3)^2}dz = 2\pi i\frac{1}{16} = \frac{\pi}{8}i, \quad si\ C:|z|=\frac{3}{2},$ pues en tal disco la curva *C* solamente encierra la singularidad $z=1$ de residuo $1/16$.

- En el disco $|z|\le 5$ es $\oint_C \frac{z^2}{(z-1)(z+3)^2}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{16}+\frac{15}{16}\right) = 2\pi i$, si $C:|z|=4$, pues en tal disco la curva C encierra las singularidades aisladas $z=1$ y $z=-3$, de residuos respectivos $\frac{1}{16}$ y $\frac{15}{16}$.

Otros ejemplos:

1_ Usando el método de los residuos, calcular

Acerca de la integración en variable compleja

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\phi d\phi$$

para actuar como en los ejemplos elementales anteriores, introduzcamos la variable compleja z:
llamando

$z = e^{i\phi}$, es $dz = ie^{i\phi}d\phi = izd\phi \to d\phi = \frac{1}{iz}dz$ y $\cos\phi = \frac{1}{2}\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

por tanto $\cos^{2n}\phi = \frac{1}{2^{2n}}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n}$ y resulta que siendo $C : |z| = 1$ se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\phi . d\phi = \oint_C \frac{1}{2^{2n}}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{1}{iz}dz = \frac{1}{i2^{2n}} \oint_C \frac{\left(z^2 + 1\right)^{2n}}{z^{2n+1}}dz$$

y la función presenta en el origen un polo de orden $2n+1$.

Debido a la complejidad del orden del polo en el origen, no utilizaremos la fórmula del residuo como limite de la derivada de orden $2n$, sino que determinaremos elementalmente el coeficiente de z^{-1} usando el desarrollo del binomio de Newton:

$\frac{1}{i2^{2n}}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{1}{z} = \frac{1}{i2^{2n}} \sum_{h=0}^{2n} \binom{2n}{h} z^{2n-h} \left(\frac{1}{z}\right)^h \frac{1}{z} = \frac{1}{i2^{2n}} \sum_{h=0}^{2n} \binom{2n}{h} z^{2(n-h)-1}$, el coeficiente de

z^{-1} exige que $2(n-h) - 1 = -1 \to n = h$, por lo que el término sería

$$a_{-1}z^{-1} = \frac{1}{i2^{2n}}\binom{2n}{n} z^{-1} \to a_{-1} = \frac{1}{i2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{i2^{2n}} \frac{(2n)!}{n!.n!} = \frac{1}{i} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

Resultado el valor de la integral:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\phi . d\phi = \oint_C \frac{1}{2^{2n}}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{1}{iz}dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \frac{1}{i} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = 2\pi \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

2_ Calcular

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz$$

a) Cuando es $C:|z|=3/2$.
b) Cuando es $C:|z|=10$.
c)

Las singularidades aisladas son $z=1$ (polo simple) y $z=-3$ (polo doble).
Veamos los residuos aplicando la fórmula del limite:

$$a_{-1}^{1}=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e^{z}}{(z-1)(z+3)^{2}}=\lim_{z\to 1}\frac{e^{z}}{(z+3)^{2}}=\frac{1}{16}e$$

$$a_{-1}^{2}=\lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}(z+3)^{2}\frac{e^{z}}{(z-1)(z+3)^{2}}=\lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\frac{e^{z}}{(z-1)}=\lim_{z\to -3}\frac{e^{z}(z-1)-e^{z}}{(z-1)^{2}}=-\frac{5}{16}e^{-3}$$

a) Si es $C:|z|=3/2$, el contorno donde está definida la integral es una circunferencia de radio 3/2 y centrada en el origen, que rodea solamente al polo simple $z=1$, por tanto:

$$\oint_{C}\frac{e^{z}}{(z-1)(z+3)^{2}}dz=2\pi i a_{-1}^{1}=2\pi i\frac{1}{16}e=\frac{\pi i e}{8}$$

b) Si es $C:|z|=10$, el contorno es ahora una circunferencia de radio 10 y centrada en el origen, rodeando ahora a ambos polos de la función, por lo que es

$$\oint_{C}\frac{e^{z}}{(z-1)(z+3)^{2}}dz=2\pi i(a_{-1}^{1}+a_{-1}^{2})=2\pi i\left(\frac{1}{16}e-\frac{5}{16}e^{-3}\right)=\frac{\pi i}{8}\left(e-\frac{5}{e^{3}}\right)$$

Dejamos al lector el cálculo de la siguiente integral, de la que mostramos la solución

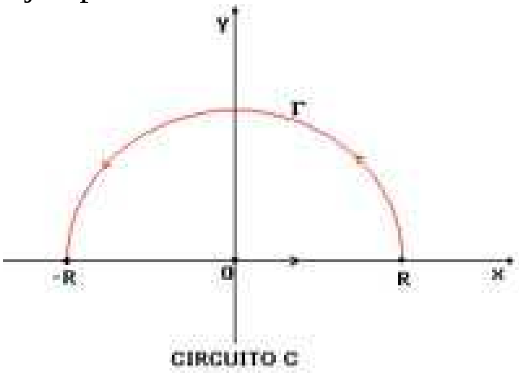
$$\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{a+bsen\theta}\text{, siendo } a^{2}>b^{2}>0, ab>0$$

Solución: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^{2}-b^{2}}}$

06.4. Aplicación del método de los residuos al cálculo de integrales impropias:

Cuando hemos de calcular integrales impropias tales como $\int_{o}^{+\infty}f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{0}f(x)dx,\cdots$, podemos realizar el tratamiento consistente en considerar el intervalo real de integración como parte de un contorno, de forma que podamos establecer que la suma de las integrales a lo largo de los tramos del circuito es la integral de contorno total, calculable mediante el método de los residuos.

Ejemplos:



Podemos considerar el circuito C que se muestra en esta figura constituido por dos ramas o caminos: el camino curvo, semicircunferencia Γ, y el camino rectilíneo, que va desde el punto –R hasta el punto R, dentro de la recta real.

Si consideramos la integral de contorno a lo largo del circuito, podemos realizar la descomposición siguiente, integrando, como siempre, en sentido antihorario:

$$\oint_C f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

donde el circuito *C* rodea las singularidades aisladas que puedan figurar en su interior.
o bien:

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = \oint_C f(z)dz - \int_\Gamma f(z)dz$$

y si tomamos el límite para $R \to \infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \oint_C f(z)dz - \lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)dz$$

y el circuito encerraría ahora todas las singularidades aisladas que hubiera en todo el semiplano superior.

Asimismo, podemos expresar, si la función $f(x)$ fuera par:

$$2\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \oint_C f(z).dz - \lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)dz$$

con lo que

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} \oint_C f(z).dz - \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)dz$$

En definitiva, el cálculo de la integral impropia, requiere determinar la integral de contorno a lo largo del circuito mediante el método de los residuos, y la integral a lo largo del camino constituido por la semicircunferencia usando algún procedimiento que dependa de la función que se integra (acotación, discontinuidad, etc.). Para este último paso resulta útil el siguiente teorema de acotación.

Teorema:
Siendo M y k constantes reales tales que $M>0$ y $k>1$, se verifica que si en la semicircunferencia Γ de radio R es $|f(z)|\leq \frac{M}{R^k}$, entonces $\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz=0$.

Demostración:

Para $z=Re^{i\theta}$, $\left|\int_\Gamma f(z)dz\right|\leq \int_\Gamma |f(z)||dz|\leq \int_\Gamma \frac{M}{R^k}\left|i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\,d\theta\right|=\frac{M}{R^k}R\int_0^\pi d\theta=\pi\frac{M}{R^{k-1}}$

de lo cual

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma f(z)dz\right|\leq \lim_{R\to\infty}\pi\frac{M}{R^{k-1}}=0$$

por tanto:

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma f(z)dz\right|=0\to \lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz=0$$

Ejemplo de integración de una función par sobre el eje real en el que aplicamos el teorema anterior. Cálculo de la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$$

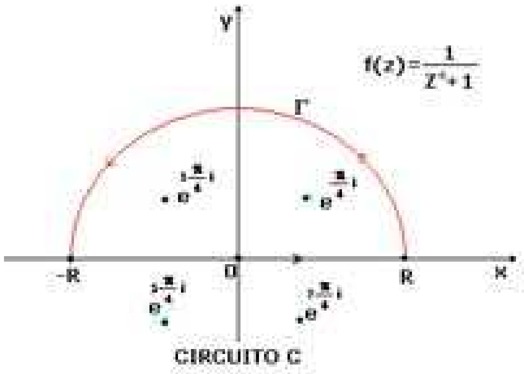
Comprobamos en primer lugar que está acotada sobre la semicircunferencia Γ:

$$z=Re^{i\theta}\to|f(z)|=\left|\frac{1}{z^4+1}\right|=\left|\frac{1}{(Re^{i\theta})^4+1}\right|\leq\left|\frac{1}{R^4e^{i4\theta}-1}\right|\leq\frac{1}{\left|R^4e^{i4\theta}\right|-1}=\frac{1}{R^4-1}\leq\frac{2}{R^4}$$

Determinamos las singularidades de la función $f(z)=\frac{1}{z^4+1}$:

$$z^4+1=0\to z^4=-1\to z_1=e^{\frac{\pi}{4}i},z_2=e^{3\frac{\pi}{4}i},z_3=e^{5\frac{\pi}{4}i},z_4=e^{7\frac{\pi}{4}i}$$

Acerca de la integración en variable compleja



son polos simples, de los cuales solamente los dos primeros quedan rodeados por el circuito (están en el semiplano superior).

Residuos de los dos primeros polos:

$$a_{-1}^{1}=\lim_{z\to z_1}\left(z-z_1\right)\frac{1}{z^4+1}=\lim_{z\to z_1}\left(\frac{1}{z^3+z_1z^2+z_1^2z+z_1^3}\right)=\frac{1}{4z_1^3}=\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}\pi i}$$

$$a_{-1}^{2}=\lim_{z\to z_2}\left(z-z_2\right)\frac{1}{z^4+1}=\lim_{z\to z_1}\left(\frac{1}{z^3+z_2z^2+z_2^2z+z_2^3}\right)=\frac{1}{4z_2^3}=\frac{1}{4}e^{-\frac{9}{4}\pi i}$$

Calculo de la integral:

Por ser la integral de una función par, puede expresarse como $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\lim_{R\to\infty}\int_0^{R}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\oint_C\frac{dx}{z^4+1}-\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma\frac{dx}{z^4+1}=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\oint_C\frac{dx}{z^4+1}-0=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\oint_C\frac{dx}{z^4+1}=$$

$$=\frac{1}{2}2\pi i(a_{-1}^{1}+a_{-1}^{2})=\frac{1}{2}2\pi i\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}\pi i}+\frac{1}{4}e^{-\frac{9}{4}\pi i}\right)=\frac{1}{2}2\pi e^{\frac{\pi}{2}i}\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}\pi i}+\frac{1}{4}e^{-\frac{9}{4}\pi i}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}\pi i}+\frac{1}{4}e^{-\frac{7}{4}\pi i}\right)=\frac{\pi}{4}\left[\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+isen\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)+\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)+isen\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$$

En este otro ejemplo podemos acotar rápidamente la integral sobre el tramo de la semicircunferencia Γ:

Sea el calculo de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\lim_{R\to\infty}\oint_C\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}-\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}$$

Veamos que se anula la integral sobre la semicircunferencia Γ:

$$\left|\int_\Gamma\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}\right|=\left|\int_0^\pi\frac{Rie^{i\theta}d\theta}{\left(\left(\mathrm{Re}^{i2\theta}\right)+1\right)^2}\right|\le\int_0^\pi\left|\frac{Rie^{i\theta}d\theta}{\left(\left(\mathrm{Re}^{i2\theta}\right)+1\right)^2}\right|\le\int_0^\pi\left|\frac{Rie^{i\theta}}{\left(\left(\mathrm{Re}^{i2\theta}\right)-1\right)^2}\right|\left|d\theta\right|$$

$\le\frac{R}{(R^2-1)^2}\pi\to 0$ para $R\to\infty$. Luego $\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}=0$.

y finalizamos el cálculo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\lim_{R\to\infty}\oint_C\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}$$

Singularidades:

$$(z^2+1)^2=0\to\left((z-i)(z+i)\right)^2=0\to\begin{cases}z=i\quad(doble)\\ z=-i\ (doble)\end{cases}$$

De ampos polos, solo el primero está dentro del recinto rodeado por el circuito.

Calculemos el residuo:

$$a_{-1}^1=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left((z-i)^2\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}\right)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\left(z+i\right)^2}\right)=\lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3}=-\frac{1}{4}i$$

Finalmente: $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\lim_{R\to\infty}\oint_C\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}=2\pi i(-\frac{1}{4}i)=\frac{\pi}{2}$$

07. Bibliografía

Ahlfors, L. V.; Análisis de variable compleja, McGraw-Hill, New York 1979.

Apostol, T.M.; Análisis Matemático, Editorial Reverté, Barcelona, 1986

Acerca de la integración en variable compleja

Caratheodory; Theory of functions of a complex variable, Chelsea, 2001.

Cartan, H.; Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas, Madrid, Selecciones Científicas, 1968.

Copson, E. T.: An introduction to the theory of functions of a complex variable, Oxford University Press, 1970.

Goursat, E.; Cours d'analyse Mathematique, Gauthier Villars, Imprimeur Libraire, 1905, Paris.

Markushevich, A. I; Teoría de las funciones analíticas, Editorial Mir: Moscú 1970.

Philips, E. G.; Funciones de una variable compleja, Dossat, Madrid, 1963.