ALEPH SUB – CERO
SERIE DE DIVULGACIÓN
$\aleph_0$ 2015 - II $\aleph_0$
pp. 70 - 87

LA TEORÍA DE DISTRIBUCIONES

(Distributions Theory)

Adunador: ALBERTO MEJÍAS*

Recepción: Agosto 2015. Revisión y aceptación: Septiembre 2015.

Resumen. Se muestra, de manera sucinta, la elaboración y desarrollo de la Teoría de Distribuciones como cuerpo de doctrina, por LAURENT SCHWARTZ.

Descriptores. Función Generalizada, Derivada Generalizada, Convolución, Ecuaciones Diferenciales, Series Fourier.

Abstract. It is showed, succinctly, the elaboration and development of the Theory of Distributions as a body of doctrine, by LAURENT SCHWARTZ.

Keywords. Generalized Function, Generalized Derivative, Convolution, Differential Equations, Fourier Series.

1 INTRODUCCIÓN

La contribución matemática más conocida de LAURENT SCHWARTZ es la elaboración y desarrollo de la Teoría de Distribuciones (TD). Por ello y porque esta teoría es una de los grandes desarrollos matemáticos del siglo XX, vamos a dedicar esta sección a describir someramente su contenido y los aportes de SCHWARTZ. El lector interesado podrá encontrar más información en [3] y, sobre todo, en [6].

1.1 Antecedentes

Los modelos fundamentales de la física matemática vienen regidos por ecuaciones diferenciales y, por tanto, son aplicables, solamente, (al menos en principio) a fenómenos en los que las variables físicas involucradas sean funciones suficientemente regulares del espacio y el tiempo. Si bien, esto no produce ninguna discrepancia con los datos observables en los fenómenos estáticos (descritos usualmente,

* ALBERTO R. MEJÍAS E. es Licenciado en Matemáticas, egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes (ULA) Mérida-Venezuela. Es profesor de Topología, jubilado por la Universidad de los Andes. alrame59@gmail.com

por ecuaciones elípticas), no sucede lo mismo cuando se estudian fenómenos dinámicos (regidos generalmente, por ecuaciones hiperbólicas): en este caso, las variables físicas exhiben, a menudo, discontinuidades esenciales en la práctica. Así, por ejemplo, una cuerda de violín pulsada en su punto medio, vibra inicialmente, de acuerdo con una ley de la forma

$$u(x, t) = 2 - \frac{1}{2}(|x - t - 1| + |x + t - 1|),$$

para una elección adecuada de las unidades y del sistema de referencia. La derivada del desplazamiento es, por tanto, discontinua en $x = 1 \pm t$. Como la ecuación ondal, que rige al movimiento de la cuerda, es de orden 2 (esencialmente, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$), la función anterior no puede considerarse como solución de la misma, en el sentido habitual.

En otro orden de cosas, las hipótesis para la validez de muchos teoremas son difíciles de comprobar en la práctica. Puede decirse que, desde el comienzo del cálculo diferencial, aparece la conveniencia de extender estas nociones, de manera que las operaciones fundamentales del análisis se puedan realizar siempre y sin hipótesis complicadas de validez. Así surge la idea de obtener una *noción generalizada de diferenciación*, que extienda la habitual y permita derivar funciones que no son derivables en sentido ordinario. Ésta, junto con la noción paralela de *solución generalizada* de una ecuación diferencial (ED), es el primer origen de la TD (véase el prólogo de [8]).

Históricamente, la primera noción de solución generalizada de una ED, es la de considerar como tal, a una función que sea límite (en algún sentido) de una sucesión de soluciones clásicas. El método ya fue anticipado por L. EULER, en 1765, durante su larga polémica con J. L. D'ALEMBERT, sobre la solución de la ecuación de la cuerda vibrante (es decir, la ecuación ondal unidimensional). A lo largo del primer tercio del siglo XX, este método fue utilizado por diversos autores para introducir soluciones generalizadas de ED's concretas, usando distintas nociones de convergencia en la definición. Así, en 1926, N. WIENER emplea la convergencia en L^2 de una sucesión de soluciones clásicas; J. LERAY (1934) usa la convergencia débil o en norma en L^2; S. SOBOLEV (1935) emplea la convergencia en L^1; K. O. FRIEDRICHS (1939) utilizó la convergencia en la norma $\| f \|_2 + \| f' \|_2$; L. SCHWARTZ (en 1944, inmediatamente antes de definir las distribuciones) empleó la convergencia uniforme sobre compactos, etc.

Otra manera de extender la noción de solución de una ED, es generalizar la noción de derivada y definir como solución a una función cuyas derivadas generalizadas satisfagan la ED. Entre los primeros trabajos en esta dirección, puede citarse la noción de *derivada simétrica* de B. RIEMANN, introducida y utilizada sistemáticamente en su *Habilitatioarbeit* sobre series trigonométricas, en 1854. Posteriormente, podemos citar la extensión realizada por U. DINI (1878), sustituyendo simplemente, al límite ordinario en la definición de derivada por los límites superior e inferior, a la derecha y a la izquierda, en cada punto. En el mismo orden de ideas está la de sustituir una expresión diferencial compuesta de varios operadores, lo que involucra un paso al límite para cada uno, por un solo paso al límite. Por ejemplo, G. C. EVANS sustituyó en 1913 al operador

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u$$

por

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y)+u(x,y+h)+u(x-h,y)+u(x,y-h)-4u(x,y)}{h^2}.$$

Variaciones de estos métodos fueron usados también por H. PETRINI (1908) y N. WIENER (1927).

La aparición de la integración LEBESGUE, originó, por otro lado, la noción de *derivada en casi todo punto*.

Las distintas nociones de derivada generalizada de una función fueron utilizadas sistemáticamente en el contexto de la teoría de la medida (teorema fundamental del cálculo) y el cálculo de variaciones, lo que condujo de manera natural a la aparición en este ámbito, de los precursores de los que después se llamaron *espacios SOBOLEV*, que son espacios de funciones absolutamente continuas, tales que ellas y sus derivadas hasta un cierto orden (¡definidas en casi todo punto!), están en L^p (BEPPO-LEVI, TONELLI, NIKODYM, etc.).

Pero el método más utilizado para extender la noción de solución de una ED (A) de orden n, consiste en encontrar otra ecuación o condición (B) que, para funciones de clase n, sea equivalente a la original, pero que tenga sentido para funciones más generales. Los objetos que satisfagan (B) se llamaran entonces, *soluciones generalizadas* de (A). En general, la nueva condición (B) se obtiene por alguna forma de integración por partes. Por ello, a menudo la condición a satisfacer por las soluciones generalizadas es de la forma "la condición (B) se cumple para todos los objetos de una cierta clase" (*objetos de ensayo* u *objetos test*).

El primero en sacar provecho a estas ideas fue el profesor de Harvard M. BÔCHER, en sus estudios sobre la noción de *función armónica generalizada* (es decir, solución generalizada de la ecuación $\Delta u := \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$) en un dominio acotado Ω (1905). Usando la fórmula GREEN

$$\iint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}),$$

BÔCHER observó que, tomando $v = 1$, si u es armónica en Ω, entonces $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = 0$, *condición en la que solo aparecen las derivadas primeras de u*. BÔCHER definió entonces a una función armónica generalizada en Ω, como una función de clase 1 en Ω, que verifica

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

para todo círculo $D \subset \Omega$.

Como el propio BÔCHER se encargó de probar, toda función armónica generalizada es una función armónica en sentido clásico. (De hecho, toda *distribución* solución de la ecuación LAPLACE $\Delta u = 0$, es una función armónica clásica). Las ideas de BÔCHER fueron continuadas por G. C. EVANS y empleadas, también, por distintos autores para definir soluciones generalizadas de ED's.

Finalmente, otro método muy relacionado con el anterior, es el llamado método de las *funciones de ensayo* y es el método básico de la TD de SCHWARTZ. Consiste en multiplicar a la ED en estudio, por ejemplo $P(D)u = 0$, por una función de ensayo, suficientemente regular, con soporte compacto en un cierto dominio y el resultado se integra por partes:

$$\langle P(D)u, \varphi\rangle := \int P(D)u \cdot \varphi = 0 = \int u \cdot P(D)\varphi = \langle u, P(D)\varphi\rangle \quad \forall\varphi.$$

De esta forma, el operador diferencial se transfiere a la función de ensayo y la ecuación integro-diferencial resultante, que ha de verificarse para todas las funciones de ensayo, no presupone ninguna regularidad de la solución. Es un método muy relacionado con el anterior y su origen está en el estudio de las ecuaciones hiperbólicas, anticipado por LAGRANGE en 1761 (véase, por ejemplo, [3], pag. 31), fue formulado explícitamente por N. WIENER (1926) y después por J. LERAY, S. SOBOLEV y R. COURANT (de hecho, la primera aparición de una solución generalizada de una ED en un libro de texto, tiene lugar en la edición de 1937 del clásico *Methoden der Mathematischen Physik*, de R. COURANT y D. HILBERT).

Otro antecedente principal del origen de las distribuciones, está relacionado con el anterior: Los ingenieros, físicos y técnicos venían usando desde el siglo XIX diferentes *cálculos operacionales* para resolver fácilmente diversos tipos de ecuaciones funcionales. Estos cálculos, que adolecen de falta de rigor matemático, conducen en muchos casos, a resultados satisfactorios. Herramienta fundamental en ellos es el uso de ciertas *funciones singulares*, como la ubicua "función" δ que, aunque introducida explícitamente por G. R. KIRCHOFF en su tratamiento de la ecuación de ondas en un trabajo publicado en 1882, realmente aparece más o menos maquillada a lo largo de la historia, en conexión con distintos temas: series FOURIER (FOURIER, *Théorie Analytique de la Chaleur*, 1822), funciones GREEN, etc. Más significativa es la utilización de la función δ por parte de físicos e ingenieros. Así, el ingeniero eléctrico O. HEAVISIDE desarrolló, a finales del siglo XIX, un cálculo operacional de difícil justificación matemática, basado en razonamientos experimentales y que alcanzó una gran difusión en el primer tercio del siglo XX. En este cálculo, la función δ aparece como función impulso unidad, derivada de la función $H(t)$, que vale 0 si $t < 0$ y 1 si $t \geq 0$. Como explica HEAVISIDE:

> ...Como H es 0 antes de 0 y constante después, H' es cero, excepto en t = 0, donde es infinita. Pero su suma total es H . Esto es, H' es una función de t, enteramente concentrada en t = 0, de suma total 1...

(Lo que propugna HEAVISIDE es la validez del teorema fundamental del cálculo para H', es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} H' = 1$). La función H aparece de modo natural en la modelización de todo fenómeno físico que comience en un momento dado. Por ejemplo, la intensidad $I(t)$ que recorre un cierto circuito eléctrico vale 0 antes de cerrar el circuito (digamos, para t < 0) y toma un valor > 0, determinado por las leyes que rigen al circuito, cuando empieza a circular la corriente. Usualmente, se supone que $I(t)$ y otras magnitudes significativas verifican un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (en general, lineales y con coeficientes constantes), con soluciones válidas para todo valor de t. Pero las magnitudes que realmente deben satisfacer a este sistema son de la forma $H(t)I(t)$, de donde el interés en definir $H'(t)$. En el cálculo de HEAVISIDE la H' aparecía como un término intermedio en las operaciones y desaparecía en los resultados finales. Pero en los intentos posteriores de tratar con rigor el cálculo operacional en términos de la transformada LAPLACE, el papel de la δ fue tomando mayor protagonismo.

Pero quizá el mayor responsable de la popularización de δ y sus variantes fue P. A. M. DIRAC, en su intento de unificar los formalismos matricial y ondulatorio de la mecánica quántica. DIRAC representó a los estados de un sistema mecánico por vectores y a los observables por operadores lineales. DIRAC suponía que en el espacio vectorial de estados, se podía elegir siempre a una base formada por los autovectores de un operador correspondiente a algún observable. Pero, desde el punto de vista físico, los operadores más interesantes poseen un espectro continuo, por lo que la base correspondiente de autovectores, (ψ_p), será, en general, infinita (en palabras de DIRAC: *...el número total de estados independientes es infinito, e igual al número de puntos de una línea*) y la expresión de cualquier estado (vector) en términos de la base tomará la forma $\psi = \int a_p \psi_p \, dp$ (en lugar de una suma). Pero cuando, por ejemplo, se quiere representar de esta forma a uno de los autovectores ψ_q, surge un problema, pues se tiene que escribir $\psi_q = \int \delta(p - q) \psi_p \, dp$, donde "*la función impropia δ está definida por*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(p) dp = 1, \qquad \delta(p) = 0 \text{ para } p \neq 0."$$

La representación de operadores en este caso, se hacía en términos de una "matriz continua", (α_{pq}), en la forma

$$\alpha(\psi_q) = \int \psi_p \alpha_{pq} dp.$$

Pero, entonces, por ejemplo, el operador de multiplicación por una constante $c \neq 0$, requería utilizar un núcleo de la forma $\alpha_{pq} = c\delta(p - q)$, al que DIRAC interpretaba como el análogo continuo de la matriz identidad (esta fue seguramente, la razón por la que DIRAC designara δ a esta función; no por "DIRAC", sino por "KRONECKER"). DIRAC dió también, "*ciertas propiedades elementales de δ que se deducen de la definición o, al menos, no son inconsistentes*". Entre ellas:

$$\delta(-x) = \delta(x); \quad x\delta(x) = 0; \quad -\delta'(x) = \delta'(-x); \quad x\delta'(x) = -\delta(x);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a); \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)dx = -f'(a).$$

En posteriores ediciones de su obra *Principios de la Mecánica Quántica* fue añadiendo nuevas propiedades, como

$$\delta(ax) = a^{-1}\delta(x); \qquad \frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x).$$

En la tercera edición de su libro, DIRAC mencionó *la forma alternativa de definir a δ* como la derivada de la función H.

El libro de DIRAC se convirtió en un clásico y con él se generalizó el uso de las funciones singulares entre los físicos. En la tercera edición, DIRAC se acerca mucho a la definición funcional de δ, cuando dice:

> *Aunque una función impropia no tiene un valor bien definido, cuando aparece como factor en un integrando, la integral sí que tiene un valor bien definido. En la teoría quántica, siempre que aparece una función singular, en último término será usada dentro de una integral. Por tanto, sería posible desarrollar la teoría de modo que las funciones singulares aparecieran únicamente como integrandos y, así, se podrían eliminar. El uso de funciones singulares, por tanto, no supone nin-*

guna pérdida de rigor de la teoría, sino que, simplemente, es una notación conveniente... De hecho, cualquier ecuación en la que aparece la función δ puede convertirse en otra equivalente, pero generalmente más complicada, en la que δ no aparece.

No nos dice DIRAC la forma de hacer la transcripción, pero la presentación intuitiva que hace de δ, como límite impropio de funciones ordinarias, sugiere que el *método riguroso* consistiría en efectuar los cálculos con las aproximaciones de δ y luego pasar al límite en el resultado final. Parece haber evidencias claras de que muchos matemáticos desarrollaron o utilizaron distintas teorías como una forma de hacer precisos los argumentos que usaban a δ, pero no para fundamentar rigurosamente a la función δ misma. Probablemente porque estaban tan convencidos de su ilegitimidad, que ni siquiera lo intentaban.

Otro tipo de funciones singulares o *funciones generalizadas* surge en la Teoría de series y trasformadas FOURIER. La razón es que para la existencia de la integral FOURIER $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ixy} dx$, f debe ser, al menos, integrable y, por tanto, decrecer adecuadamente en el infinito. Esta restricción es un gran inconveniente en las aplicaciones y sería deseable encontrar generalizaciones de la transformada FOURIER (con sus mismas propiedades funcionales) que permitieran aplicarla a funciones acotadas o más generales. Una referencia a algunos intentos en esta dirección, aparece en la introducción de [8], llegando a decir SCHWARTZ que *...Pour l'intégrale de Fourier, l'introduction des distributions est inévitable, sous une forme directe ou camouflée*. De hecho, algunas de las soluciones encontradas por autores como CARLEMAN, BEURLING y, sobre todo, BOCHNER, son muy próximas a las distribuciones de SCHWARTZ. Una exposición más detallada de estos desarrollos puede verse en el Capítulo 3 de [6].

Pues bien, la TD trata de estudiar y resolver la mayor parte de los problemas señalados anteriormente. Las distribuciones constituyen un conjunto que se asemeja mucho al universo matemático ideal de los físicos e ingenieros, en el que "todo vale": las funciones son siempre derivables, las series pueden derivarse o integrarse término a término, etc. Este universo contiene, por un lado, a las funciones (localmente integrables) y, por otro, a las distintas *funciones singulares*, como la δ y sus derivadas. A SCHWARTZ se debe el lúcido análisis que le condujo a la elaboración de una teoría sistemática, coherente y muy potente, aplicable a la solución de muy diversos problemas.

1.2 La Contribución de L. SCHWARTZ.

En su autobiografía científica ([9]), SCHWARTZ cuenta que al final de la guerra, aislado como estaba en Grenoble, desarrollo una teoría completa de la dualidad en espacios funcionales generales, *...théorie que m'a paru alors sans application et que j'ai gardée pour moi. Elle devait être la clef de la théorie des distributions.*

SCHWARTZ generalizó la teoría de dualidad de los espacios BANACH, a los espacios FRÉCHET, definiendo el dual fuerte, caracterizando la reflexividad, los conjuntos acotados, etc. Los ejemplos más importantes de este tipo de espacios que conocía SCHWARTZ, eran los espacios de funciones holomorfas con la topología compacto-abierto usual y el espacio $C^{\infty}([0, 1])$ de las funciones de clase infinito en [0, 1] con la topología de la convergencia uniforme de todas las derivadas. Este trabajo en análisis funcional no se publicó nunca, pero fue fundamental en el descubrimiento, casi instantáneo, de las distribuciones.

El empuje decisivo lo proporcionó la lectura de un artículo de G. CHOQUET y J. DENY, titulado *Sur quelques propriétés des moyennes caractéristiques des fonctions harmoniques et polyharmoniques*. En él se caracterizaban las funciones continuas f sobre $\mathbb{R}^n$ tales que el subespacio vectorial engendrado por $f \circ S$, cuando S recorre todas las semejanzas sobre $\mathbb{R}^n$, no es denso en el espacio de todas las funciones continuas. Estas funciones resultan ser las poliarmónicas, es decir, aquellas que cumplen $\Delta^k f = 0$ para algún natural k. Como estas funciones no son, a priori, derivables, los autores introducían una definición generalizada de función poliarmónica, a través de ciertas medias iteradas. SCHWARTZ trató de generalizar el resultado, sustituyendo las semejanzas por traslaciones y homotecias. El resultado que obtuvo era similar, pero en lugar de una potencia del laplaceano, aparecía un operador diferencial con coeficientes constantes, arbitrario, de modo que la condición que debía cumplir ahora, la función f es $P(D)f = \Sigma\, a_p D^p f = 0$. SCHWARTZ tuvo que definir entonces, la noción de solución generalizada del operador $P(D)$ y optó, esencialmente, por tomar como tal, al límite uniforme sobre compactos, de soluciones ordinarias. Posteriormente, probó que toda solución generalizada (en su sentido) de la ecuación LAPLACE, era una solución ordinaria, mientras que existían soluciones generalizadas de la ecuación de ondas, que no eran soluciones ordinarias.

A raíz de este trabajo, SCHWARTZ continuó pensando en la derivación generalizada. Le parecía frustrante poder definir la solución generalizada de un operador diferencial sin haber dado un sentido a las derivadas (generalizadas) $D^p f$. Y de repente, durante lo que SCHWARTZ llamó *la plus belle nuit de ma vie* ([10], p. 246), surgió la gran idea: ¡para encontrar soluciones generalizadas de ED's, había que generalizar la noción de función! Analizando su demostración, se dio cuenta de que las soluciones generalizadas que había introducido, aparecían siempre en convolucion con una función infinitamente diferenciable con soporte compacto. Esto le llevó a introducir un nuevo objeto, que llamó *operador de convolucion*: lo definió como un operador lineal **T** del espacio $\mathcal{D}$ de las funciones infinitamente diferenciables en $\mathbb{R}^n$, con soporte compacto en $\mathcal{E}$, el espacio de las funciones de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}^n$, con la propiedad de conmutar con la convolucion:

$$\mathbf{T} \cdot (\varphi * \psi) = (\mathbf{T} \cdot \varphi) * \psi, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}.$$

Además, **T** debería verificar alguna condición de continuidad para topologías adecuadas en $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$. Este último espacio tenía una estructura bien conocida de espacio FRÉCHET, con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, de las funciones y cada una de sus derivadas. Pero, sobre $\mathcal{D}$, SCHWARTZ fue incapaz, en ese momento, de encontrar una topología que indujera la noción de convergencia secuencial que necesitaba, a saber: una sucesión (φ_n) converge a 0 en $\mathcal{D}$ si y sólo si todas las φ_n se anulan fuera de un mismo compacto y convergen uniformemente a 0, junto con cada una de sus derivadas. En consecuencia, SCHWARTZ impuso como condición de continuidad que los operadores transformaran sucesiones convergentes a 0 en $\mathcal{D}$ (en el sentido anterior), en sucesiones convergentes a 0 en $\mathcal{E}$.

SCHWARTZ observó que toda función continua f se podía identificar con el operador $\mathcal{D} \ni \varphi \to f * \varphi$, y la "función" δ de HEAVISIDE y DIRAC se podía interpretar como el operador $\mathcal{D} \ni \varphi \to \delta \cdot \varphi := \varphi$. Naturalmente, SCHWARTZ abordó la cuestión de definir la derivada de un operador, lo que hizo por la fórmula:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{T}\right) \cdot \varphi := \mathbf{T} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi,$$

que generaliza a la formula $\frac{\partial}{\partial x_i}\psi * \varphi = \psi * \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$. La primitiva de un operador se define de manera obvia, así como la convolucion de dos operadores. El producto de un operador por una función de $\mathcal{D}$; sin embargo, le ocasionó algunas dificultades.

Como hemos dicho, SCHWARTZ desarrolló estos conceptos y varios teoremas sobre sus operadores en una noche de octubre de 1944. En los seis meses siguientes continuó trabajando sobre el mismo tema. Alrededor de febrero de 1945, comenzó a desarrollar una teoría de trasformadas FOURIER para sus operadores, pero se encontró con grandes dificultades. Intentó resolverlas durante varios meses. Por fin, un día, de repente, se percató de que todos sus problemas se resolvían fácilmente si definía las funciones generalizadas, no como operadores, sino como *funcionales* secuencialmente continuos sobre $\mathcal{D}$. A estos nuevos objetos los llamó *distribuciones* y a su conjunto lo designó por $\mathcal{D}'$.

Como los elementos de $\mathcal{D}$ son muy regulares, la mayor parte de las operaciones usuales del análisis transforman a $\mathcal{D}$ en sí mismo (con la excepción importante de la transformada FOURIER) y, además, son continuas para la noción de convergencia secuencial introducida. Por transposición, se obtienen operadores de $\mathcal{D}'$ en sí mismo que, con toda propiedad, puede considerarse como la extensión a las distribuciones de las operaciones originales. Más aún, $\mathcal{D}$ está contenido en muchos de los espacios funcionales usuales y es *denso* en ellos para sus topologías naturales (p.ej. los espacios L^p, $1 \leq p < \infty$, los espacios FRÉCHET $\mathcal{E}^m$ $(0 \leq m \leq \infty)$ de las funciones de clase m sobre $\mathbb{R}^n$, con la noción de convergencia uniforme sobre compactos de las funciones y cada una de sus m derivadas, etc.) Por tanto, de nuevo por transposición, los duales de esos espacios se pueden identificar con subespacios del espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'$. Como ya hemos dicho, toda función localmente integrable f se puede identificar con una distribución $T_f \in \mathcal{D}'$, por la formula $T_f(\varphi) := \int f\,\varphi, \forall\, \varphi \in \mathcal{D}$.

En cuanto a la transformación FOURIER $\mathcal{F}$, un famoso teorema de PALEY y WIENER, muestra que la única función $\varphi \in \mathcal{D}$, tal que $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{D}$ es la idénticamente nula. Por ello, SCHWARTZ tuvo que introducir nuevos espacios de funciones de ensayo para extender la transformada FOURIER a las distribuciones. Así surgió el espacio $\mathcal{S}$, de las funciones de decrecimiento rápido en el infinito.

Dotando a $\mathcal{S}$ de una topología natural de espacio FRÉCHET, resulta que $\mathcal{F}$ es un isomorfismo topológico de $\mathcal{S}$ a sí mismo y $\mathcal{D}$ es *denso* en $\mathcal{S}$. Por tanto, el dual $\mathcal{S}'$ se puede identificar con un subespacio de las distribuciones (las *distribuciones temperadas*) y el operador transpuesto $\mathcal{F}^t$ puede considerarse como la extensión de la transformada FOURIER a las distribuciones de $\mathcal{S}'$. Señalemos que $\mathcal{S}'$ es muy grande:

contiene a todos los L^p, $1 \leq p \leq \infty$; pero, también, a los polinomios, a δ y sus derivadas, etc.

Según sus propias afirmaciones, la definición "correcta" de distribución le fue sugerida a SCHWARTZ por los dos hechos siguientes:

1) Su trabajo anterior sobre la dualidad de espacios de FRÉCHET.

2) Su conocimiento, a través del grupo BOURBAKI, de la teoría de medidas RADON, en particular la δ, que podían representarse como funcionales sobre un espacio de funciones continuas con soporte compacto.

Durante la primavera de 1945, SCHWARTZ desarrolló su nueva teoría de distribuciones. Si en la teoría de operadores de convolucion, su trabajo sobre análisis funcional abstracto había jugado un papel importante, en la nueva teoría desempeñaba un lugar mucho más destacado. Y la influencia era recíproca. Por ejemplo, el concepto de *límite inductivo* de espacios FRÉCHET se originó en la teoría de distribuciones.

SCHWARTZ sabía muy bien que la convergencia secuencial que había definido en $\mathcal{D}$ no podía obtenerse a partir de una topología FRÉCHET en el espacio. Por tanto, él trató de definir sólo un sistema adecuado de conjuntos acotados (*bornología*) que le permitieran, por dualidad, definir una topología en $\mathcal{D}'$, el espacio de distribuciones. Cuando DIEUDONNÉ conoció la descripción de $\mathcal{D}$, la relacionó con la teoría abstracta de límites inductivos de espacios topológicos. En 1949 apareció un trabajo conjunto de DIEUDONNÉ y SCHWARTZ, *La dualité dans les espaces* ($\mathcal{F}$) et ($\mathcal{LF}$) en el que iniciaba la teoría de limites inductivos de espacios localmente convexos, probando en un marco abstracto los principales teoremas que SCHWARTZ había demostrado en $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$.

Gracias a su trabajo previo en análisis funcional, SCHWARTZ desarrolló su teoría, tan rápidamente, que pudo dar un curso sobre ella en el invierno 1945-46, en el Collège de France de París.

Aparte de sus conocimientos sobre soluciones generalizadas de ecuaciones diferenciales (origen de su interés en el tema), SCHWARTZ no tenía información, en 1944, de la mayor parte de los resultados que hemos citado anteriormente, como precedentes de las distribuciones: el cálculo HEAVISIDE, las funciones singulares de la mecánica quántica, los trabajos de BOCHNER y CARLEMAN sobre generalizaciones de la transformada FOURIER, etc. Tampoco sabía nada de un importante trabajo, aparecido en 1936, de S. SOBOLEV, que tenía muchos puntos de contacto con su teoría. En efecto, en ese trabajo, titulado *Méthode nouvelle à résoudre le problème* *de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales*, SOBOLEV aborda el problema CAUCHY para una ED en derivadas parciales de orden 2, hiperbólica. Para su solución, introduce el espacio de las funciones de clase s (suficientemente grande), de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ y el espacio fundamental de funcionales, Z_s, como los funcionales lineales secuencialmente continuos, en el mismo sentido que SCHWARTZ (es decir, [¡las distribuciones SCHWARTZ para $s = \infty$!). Identifica las funciones localmente integrables con funcionales, define al operador de derivación de la forma usual, etc., lo que le permite extender el operador diferencial a Z_s y tratar de resolver el problema CAUCHY en este espacio. En lugar de eso, SOBOLEV introdujo ciertos espacios intermedios de funciones, lo que le permitió obtener condiciones para que existieran soluciones clásicas del problema tratado. SOBOLEV no continuó el estudio de los espacios funcionales. En sus trabajos posteriores se mantuvo siempre dentro de los conceptos tradicionales de función, aunque sí usó sistemáticamente la noción de diferenciación generalizada (de funciones), lo que le llevó a introducir los espacios funcionales que hoy conocemos por su nombre:

$$W_m^p = \{f \in L^p; D^\alpha f \in L^p \text{ para } |\alpha| \leq m\},$$

donde la derivada $D^\alpha f$ ha de entenderse en el sentido de las distribuciones. En 1938 anunció sus famosos *teoremas de inmersión* que fueron (y son) ampliamente utilizados. En resumen, la diferenciación generalizada SOBOLEV influyó de forma importante en la utilización de los espacios SOBOLEV en la teoría de ED's, pero los funcionales SOBOLEV (las distribuciones) no volvieron a ser utilizados hasta su redescubrimiento por SCHWARTZ.

Así pues, SOBOLEV, como SCHWARTZ, quería generalizar el concepto de función y algunas operaciones clásicas y construir un conjunto más amplio donde cierto problema pudiera resolverse más fácilmente. Los métodos inicialmente usados por SOBOLEV y SCHWARTZ son análogos: funcionales (sobre los mismos espacios) y transposición. Desde este punto de vista, puede decirse que SOBOLEV descubrió a las distribuciones. Sin embargo, SOBOLEV elaboró a estos objetos como instrumento para resolver un problema concreto, y no volvió a ocuparse de ellos en general. Contrariamente, SCHWARTZ desarrolló una teoría completa, versátil y muy potente, aplicable y aplicada por él mismo a la solución de muchos problemas diferentes. Además, introdujo una serie de nociones que ni se esbozan en el trabajo de SOBOLEV: las distribuciones temperadas, el soporte de una distribución, las transformaciones FOURIER y LAPLACE de distribuciones, la interpretación de δ y las funciones singulares de los físicos como distribuciones, así como las partes finitas de HADAMARD, los productos tensoriales y la convolucion, etc. Así que podemos decir que, si bien SOBOLEV descubrió a las distribuciones, SCHWARTZ elaboró y desarrolló a la *Teoría de Distribuciones* como cuerpo de doctrina.

SCHWARTZ escribió cuatro artículos sobre la teoría de distribuciones antes de la publicación de su monografía *Théorie des Distributions*, aparecida en dos volúmenes en 1950/51, y que pronto se convirtió en la referencia estándar sobre el tema. La reedición de 1966 contenía dos nuevos capítulos, uno sobre la Transformación LAPLACE y otro sobre las Corrientes.

La contribución de SCHWARTZ a la sistematización y desarrollo de la teoría de distribuciones, sería suficiente para otorgarle un lugar de privilegio entre los matemáticos del siglo XX. Pero su actividad matemática (que comentaremos más adelante) no se ha limitado a esta tarea, inmensa de por sí, sino que ha producido también importantes contribuciones en áreas como Análisis Funcional, Teoría de la Medida, Ecuaciones en Derivadas Parciales o Teoría de la Probabilidad.

1.3 La obra matemática de LAURENT SCHWARTZ

Como hemos dicho ya, la obra matemática de SCHWARTZ abarca muchos más aspectos que la Teoría de Distribuciones. Y nada mejor que tener al propio SCHWARTZ como guía para conocer su obra, quien, en [9], divide su labor de investigación en cinco grandes apartados:

• I. Polinomios, sumas de exponenciales, funciones semi-periódicas, análisis y síntesis armónica.

Aquí incluye SCHWARTZ a su Tesis y a algunos de sus primeros trabajos. En todos ellos se estudian problemas de aproximación en espacios funcionales. Así, en su Tesis, SCHWARTZ aborda el problema siguiente. Un famoso teorema de CH. H. MÜNTZ generaliza al teorema de WEIERSTRASS probando que toda función real continua en [0, 1] se puede aproximar uniformemente por combinaciones lineales finitas de los monomios $\{t^{\lambda_n}; \lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \ldots\}$ si y sólo si $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ diverge. La pregunta a la que responde SCHWARTZ en su Tesis es ¿qué funciones se pueden aproximar por los polinomios precedentes, si la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ converge?. El Teorema HAHN-BANACH y sus consecuencias jugaron un papel importante en la solución.

El resto de los trabajos de este apartado trata problemas similares: caracterizar cuando un cierto subespacio de un espacio funcional contiene algunos elementos distinguidos y, en el caso de la síntesis armónica, probar que el subespacio vectorial cerrado generado por los elementos distinguidos coincide con el espacio de partida. Particularmente interesante, por los trabajos posteriores que origino, fue el problema de la síntesis armónica en el espacio $\mathcal{S}'$ de las distribuciones temperadas que, vía la transformación FOURIER, se traslada a interesantes problemas de anillos de funciones diferenciables. Esto llevó a SCHWARTZ a ponerse en contacto con H. WHITNEY (la primera vez, aprovechando un Congreso en Nancy en junio de 1947), con un intercambio científico fructífero para ambos. En relación con estos temas, hay que destacar los trabajos de B. MALGRANGE y J. C. TOUGERON, recogidos algunos de ellos, en las conocidas monografías *Ideals of differentiable functions* (B. Malgrange, Tata Institute, Oxford University Press, 1967) y *Les Idéaux de fonctions différentiables* (J. C. TOUGERON, Springer, 1972).

• **II.** ***La Teoría de Distribuciones*.**

Es probablemente la obra más emblemática de SCHWARTZ. A ella hemos dedicado toda la razón de este trabajo.

• **III.** ***Análisis funcional, distribuciones vectoriales y teorema de los núcleos*.**

Ya hemos comentado la importancia que tuvieron, para la elaboración de la teoría de distribuciones, los conocimientos de SCHWARTZ del Análisis Funcional. Pero los instrumentos necesarios para desarrollar la teoría, eran insuficientes. Y SCHWARTZ contribuyó no poco, a su creación. Ya hemos comentado el famoso trabajo con J. DIEUDONNÉ de 1949, en el que estableció la teoría de límites inductivos de espacios FRÉCHET, esencial para el conocimiento del espacio $\mathcal{D}$ y su dual. La aparición de este trabajo estimuló el desarrollo de la teoría de espacios localmente convexos (elc).

Probablemente se debe a SCHWARTZ y DIEUDONNÉ la idea de clasificar a los elc según su comportamiento frente a algunos teoremas *clásicos* o propiedades importantes de los espacios normados. Así, los elc para los que se cumple el teorema de BANACH-STEINHAUS, se llaman *tonelados*; los elc tales que toda aplicación lineal acotada sobre ellos, es continua, se llaman *bornologicos*; aquellos en los que se cumple cierta versión del teorema de la aplicación abierta, se llaman *espacios PTÁK*, etc. Lo cierto es que esta clasificación apareció en el *Livre* 5 de los *Éléments de Mathématiques* de BOURBAKI, titulado *Espacios Vectoriales Topológicos*, una de las primeras monografías sobre el tema y de gran influencia posterior.

También se debe a SCHWARTZ una extensión a los espacios FRÉCHET de la teoría RIESZ clásica, sobre perturbaciones compactas de la identidad en espacios BANACH, así como un teorema de la gráfica boreliana, que extiende al clásico teorema de la gráfica cerrada, demostrado por BANACH para F-espacios, pero que no era aplicable a los espacios de distribuciones. Este resultado fue extendido posteriormente por DE WILDE, quien introdujo a los espacios que llevan su nombre, como el marco más adecuado para desarrollar un teorema del tipo "grafica cerrada" más general.

Finalmente, queremos citar en este apartado uno de los grandes éxitos de la teoría de distribuciones: el descubrimiento en 1950, por SCHWARTZ, del teorema de los núcleos.

Desde los trabajos de HILBERT y RIESZ, se sabía que los operadores en un espacio funcional dado (por ejemplo, L_2), definidos por una "núcleo funcional" $K(x, y)$, es decir, de la forma $T_K(f)(x) = \int K(x, y)\, f(y)dy$, tenían propiedades especialmente agradables, pero que, desafortunadamente, estos operadores no agotaban todos los posibles (de hecho, la identidad en L_2 no puede expresarse así; esta es una de las dificultades que aparecieron al tratar de formalizar la mecánica cuántica. DIRAC intentó justificar que los *observables* venían siempre dados por operadores de este tipo, admitiendo, eso sí, funciones singulares como núcleos). Sin embargo, fue SCHWARTZ quien consiguió demostrar que prácticamente todos los operadores que aparecen en Análisis, se pueden representar por una "núcleo distribucional". Concretamente, si U, V son abiertos en sendos espacios euclídeos, $\mathcal{D}(U)$ es el espacio de funciones de clase infinito, con soporte compacto contenido en U, $\mathcal{D}'(V)$ es el espacio de las distribuciones sobre V(es decir, el dual de $\mathcal{D}(V)$), *cada* operador lineal continuo T: $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}'(V)$, tiene asociado un "núcleo distribucional" $K \in \mathcal{D}'(U \times V)$ de modo que para todo par de funciones $u \in \mathcal{D}(U)$, $v \in$ D(V), se tiene $\langle T(u), v\rangle = (K, u \otimes v)$ ó, en forma simbólica,

$$T(u) = \int K(x, y)u(x)dx.$$

Si, ahora, E es un espacio de funciones sobre U y F otro sobre V, usualmente se tiene la relación $\mathcal{D}(U) \hookrightarrow E \hookrightarrow \mathcal{D}'(U)$, y $\mathcal{D}(V) \hookrightarrow F \hookrightarrow \mathcal{D}'(V)$, con lo que cada operador lineal continuo S: $E \to F$ da lugar, por composición, a un T: $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}'(V)$ y, por tanto, viene definido por un núcleo distribucional.

En su Tesis, A. GROTHENDIECK (a quien ya hemos citado), otro de los grandes responsables del tremendo desarrollo de la teoría de elc en la década de 1950-1960, abordó al problema de descubrir la razón de por qué se verificaba el teorema de los núcleos en el espacio $\mathcal{D}$ y no, por ejemplo, en L_2. El resultado fue una monografía, *Produits tensorielles topologiques et espaces nucléaires*, publicada en las Memorias de la American Mathematical Society en 1953. Esta obra, de difícil lectura, contiene una tremenda cantidad de ideas seminales, que motivaron muchos de los desarrollos posteriores de la teoría de elc y de los espacios BANACH. En ella se aísla a la clase de elc para los que el teorema de los núcleos se cumple: los *espacios nucleares*. La mayor parte de los espacios de funciones que aparecen en la teoría de distribuciones, son nucleares. Sin embargo, ¡los únicos espacios normados nucleares, son los de dimensión finita! Los espacios nucleares también mostraron su importancia en la teoría de probabilidades y en la teoría de la medida.

La impronta de GROTHENDIECK se dejó notar durante mucho tiempo y no solo en Análisis Funcional (recordemos sus trabajos fundamentales sobre Geometría Algebraica, etc.) Sus ideas y métodos de trabajo abrieron nuevas perspectivas y líneas de investigación que siguen ocupando a los especialistas. Pero su enumeración resultaría demasiado técnica y prolija y, en todo caso, remitimos al lector interesado, a [1].

• IV. *Física Teórica*.

Era inevitable que SCHWARTZ estudiara algunas aplicaciones de la teoría de distribuciones a la Física. Sus contribuciones más importantes en esta dirección están recogidas en la monografía *Application of distributions to the theory of elementary particles in Quantum mechanics* (Gordon and Breach, New York, 1968), traducida posteriormente al francés.

• V. *Teoría de integración, probabilidades, probabilidades cilíndricas y aplicaciones radonificantes*.

SCHWARTZ ha manifestado su reconocimiento y admiración hacia su suegro, el gran probabilista PAUL LEVY y a la influencia que ejerció sobre él. Por ello, la teoría de medida e integración es un tema recurrente en su actividad investigadora. De hecho, a partir de 1964, estos temas acapararon su atención de forma prioritaria. Y también en ellos SCHWARTZ ha dejado su impronta. Su obra *Radon Measures on arbitrary topological spaces and Cylindrical measures*, publicada por el Tata Institute of Fundamental Research de Bombay y la Oxford University Press en 1973, establece un puente entre la teoría de la medida conjuntista, como función de conjunto numerablemente aditiva sobre una sigma algebra y la teoría de medidas RADON de BOURBAKI (heredera de los trabajos previos de H. CARTAN y A. WEIL), definidas como formas lineales no negativas sobre el espacio $\mathcal{K}(X)$ de las funciones continuas con soporte compacto sobre el espacio topológico localmente compacto X. Además, esta nueva teoría de medidas RADON en espacios arbitrarios, permite desarrollar una teoría consistente de probabilidades cilíndricas en espacios localmente convexos. Estos objetos surgen al tratar de construir funciones de conjunto en el espacio E "pegando" probabilidades definidas sobre espacios de dimensión finita (por ejemplo, a partir de medidas gaussanas n-dimensionales, obtener una cierta "medida" en el espacio total). En general, se obtiene una función de conjunto sobre un *algebra* de subconjuntos de *E*, los *conjuntos cilíndricos*, que no puede extenderse a una medida numerablemente aditiva. Introducidas por I. SEGAL, L. GROSS y la escuela soviética de probabilidades (J. V. PROHOROV, V.V. SAZONOV, R. A. MINLOS, etc.), a ellos se deben los primeros resultados destacables. La teoría SCHWARTZ proporciona un marco general que incluye a la mayoría de los resultados clásicos, clarificando el papel de los distintos tipos de operadores que aparecían en los mismos (nucleares, HILBERT-SCHMIDT, etc.) y desarrollando una teoría completamente nueva: la de los *operadores radonificantes*. Esencialmente, un operador T de un espacio BANACH E en otro F es *radonificante* (de un cierto orden p) si trasforma probabilidades cilíndricas sobre E (de tipo p) en medidas RADON sobre F (de orden p). Estos operadores generalizan a los operadores p-sumantes (y, como demostró el propio SCHWARTZ, coinciden en el caso $1 < p < \infty$, aunque el resultado no es trivial). La teoría tiene estrechas relaciones con la geometría de los Espacios BANACH, como se pone de manifiesto en la memoria *Geometry and Probability in Banach Spaces*, aparecida en 1981 como volumen No. 852 de la colección *Lecture Notes in Mathematic,* que recoge una serie de Conferencias dictadas por SCHWARTZ en Berkeley en 1978.

El interés científico de SCHWARTZ en sus últimos años se fue decantando más y más hacia las probabilidades. Obtuvo importantes resultados sobre desintegración de medidas, con aplicaciones a la teoría de martingalas y supermartingalas (con valores escalares o medidas), a los procesos MARKOV, etc. También estudió a las semi-martingalas con valores en una variedad diferenciable o una variedad analítica y sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales estocásticas.

Referencias

[1] ALONSO, L. JEREMÍAS, A. *La obra de Alexander Grothendieck*. La Gaceta de la R.S.M.E. Vol. **4**, N. 3 (2001), 623-638.

[2] BOHR, H. *Address of Professor Harald Bohr*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1950. Cambridge, Massachusets, U.S.A. Vol. **I**, 127-134. American Mathematical Society, 1952.

[3] BOMBAL, F. *Los orígenes de la Teoría de Distribuciones*. Seminario de Historia de la Matemática, I. Universidad Complutense, Madrid, 1991.

[4] CHANDRASEKHARAN, K. *The Autobiography of Laurent Schwartz*. Notices of the American Mathematical Society, Vol. **45**, N. 9 (1998), 1141-1147.

[5] HERNÁNDEZ, J. *Matemático, entomólogo, persona decente. Laurent Schwartz, un mathématicien aux prises avec le siècle*. La Gaceta de la R.S.M.E., Vol. **2**, N. 2 (1999), 319-326.

[6] LÜTZEN, J. *The Prehistory of the Theory of Distributions*. Springer-Verlag, 1982.

[7] MONASTYRSKY, M. *Modern Mathematics in the light of the Fields Medals*. A. K. Peters, Ltd. Wellesley, Mass. 1996.

[8] SCHWARTZ, L. *Théorie des Distributions*. Tercera Edicion, Hermann, París, 1966.

[9] SCHWARTZ, L. *Notice sur les travaux scientifiques de Laurent Schwartz*, Mathematical Analysis and Applications, Part A, 1-25. Col. Advances in Mathematics, Supplementary Studies. Ed. by L. Nachbin. Academic Press, 1981.

[10] SCHWARTZ, L. *Un Mathématicien aux prises avec le siècle*, Éd. Odile Jacob, 1997.

[11] SÁENZ, L. M. *Memorias de Laurent Schwartz (Pasion por saber, pasion por vivir)*, Iniciativa Socialista, 46, Junio 1997.

[12] BOMBAL, F. *Laurent Schwartz, el matemático que quería cambiar el mundo*. La Gaceta de la RSME, Vol. **6.1** (2003), 177-201.