ALEPH SUB – CERO
SERIE DE DIVULGACIÓN
$\aleph_0$ 2015 – II $\aleph_0$
pp. 53- 69

INTRODUCCIÓN A LA IDEA DE FORMA BILINEAL
(Introduction to the idea of bilinear form)

Carlos Sánchez Chinea*

Recepción: Septiembre 2015. Revisión y aceptación: Octubre 2014.

Resumen. Entre las ideas clave del álgebra lineal que abordan de frente a la geometría encontramos la de forma bilineal sobre un k-espacio vectorial, ya que permite dotar al espacio de una estructura métrica, de una distancia, desarrollando los básicos conceptos de producto escalar de vectores, de proyección de vectores sobre un subespacio, de ángulo de vectores, etc. Aquí exponemos una definición formal de la forma bilineal para el caso general de producto cartesiano de dos k-espacios vectoriales, particularizable, obviamente, al producto cartesiano de un k-espacio vectorial por sí mismo. Establecemos los homomorfismos asociados a una forma bilineal y el concepto de ortogonalidad de vectores respecto a una forma bilineal.

Palabras clave. Aplicación, Forma, bilineal, espacio vectorial, vector, cuerpo, base, matriz, matriz asociada, homomorfismo, isomorfismo, ortogonalidad, singular, degenerada, ordinaria.

Sunmary. Among the key ideas of linear algebra facing geometry we find the bilinear form over a k-vector space, given that it provides the space a metric structure, a distance, developing the basics dot vector product, projection vector onto a subspace, angle vectors, etc. Here we present a formal definition of the bilinear form for the general case of the Cartesian product of two k-vector spaces, in particular and obviously the Cartesian product of a k-vector space itself. We

---

* Carlos Sánchez Chinea, es Licenciado en Ciencias Físicas y Profesor de Matemáticas de Educación Secundaria, con la Condición de Catedrático, en el Instituto de Enseñanza Secundaria “Isidro de Arcenegui y Carmona” de Marchena, Sevilla, España.
casanchi.com, casanchi@gmail.com, casanchi@casanchi.com, casanchi@terra.es.

establish the Homomorphisms associated to a bilinear form and the concept of orthogonality of vectors regarding a bilinear form.

Keywords. Application, form, bilinear, vector space, vector, body, base, matrix, associated matrix, homomorphism, isomorphism, orthogonality, singular, degenerate, ordinary.

00. Introducción

Un polinomio $f \in k[x_1,...,x_n]$ en variaºs indeterminadas se dice que es una forma de grado *p* respecto a las indeterminadas $x_1,...,x_n$ si todos sus términos tienen grado *p*.

Será una forma lineal si *p=1*, cuadrática si *p=2*, cúbica si *p=3*, etc.

Formas lineales:

$$f_1(x_1,...,x_n)=2x_1-3x_3,\ \ f_2(x_1,...,x_n)=2x_1+x_2-3x_3,\ \ f_3(x_1,...,x_n)=5x_3,\ ...$$

Formas cuadráticas:

$$f_1(x_1,...,x_n)=2x_2^2+x_3^2,\ \ f_2(x_1,...,x_n)=x_1^2+3x_2^2,\ \ f_3(x_1,...,x_n)=5x_2^2+x_4^2,\ ...$$

Formas cúbicas:

$$f_1(x_1,...,x_n)=x_1^3,\ \ f_2(x_1,...,x_n)=x_1^3-x_2^3,\ \ f_3(x_1,...,x_n)=2x_1^3+x_2^3,\ ...$$

En definitiva, una forma lineal en el k-espacio V, dim V=n, es una aplicación $f: V \to k$, o sea, $\forall x \in V,\ f(x) \in k$, tal que

$$\forall (x_1,...,x_n) \in V,\ f(x_1,...,x_n)=a_1x_1+...+a_rx_r \in k, \text{ con } a_i \in k, i=1,...,r,\ r \le n$$

La idea de bilinealidad aparece cuando consideramos dos conjuntos de variables indeterminadas, esto es, un producto cartesiano de espacios vectoriales y aplicaciones homogéneas y lineales respecto a cada uno de los conjuntos de indeterminadas.

01.Definición

Dado un cuerpo conmutativo *k* y dos k-espacios vectoriales, V y W, consideremos las aplicaciones $f: VxW \to k$, es decir, tales que $\forall (x,y) \in VxW,\ f(x,y) \in k$.

Una aplicación $f: VxW \to k$ es bilineal si verifica que $\forall x_1, x_2 \in V, \forall y_1, y_2 \in W$ es

$$f(x_1 + x_2, y_1) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1)$$
$$f(x_1, y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2)$$
$$\forall a \in k,\ f(ax_1, y_1) = f(x_1, ay_1) = af(x_1, y_1)$$

Teorema 01.1.
El conjunto de todas las aplicaciones bilineales de *VxW* en *k*, que representamos por $L(V, W; k)$, tiene estructura de espacio vectorial sobre *k*, definiendo la suma y el producto por un escalar en la forma:

$$\forall (x,y) \in VxW, \forall a \in k:$$
$$(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$$
$$(af)(x,y) = af(x,y) = f(ax,y) = f(x,ay)$$

Demostración:
Trivial. La suma confiere a $L(V, W; k)$ estructura de grupo abeliano, y el producto por un escalar verifica las cuatro condiciones de la definición de espacio vectorial. Por tanto, con respecto a ambas operaciones es $(L(V, W; k), +, .)$ un k-espacio vectorial.

Cuando se trata de las aplicaciones bilineales en las que ambos espacios son el mismo, $VxV \to k$, diremos que se trata de aplicaciones bilineales sobre un mismo espacio vectorial, pudiendo representarse el conjunto de todas ellas por $L(V)$.

02.Expresión analítica

Expresemos la imagen de un par cualquiera del espacio producto VxW en función de las bases de ambos k-espacios.

Sea $B_1 = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ base de V, y sea $B_2 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ base de W

Introducción a la idea de forma bilineal

De ser $\forall x \in V,\ x=\sum_{i=1}^{m} x_i e_i,\quad \forall y \in W,\ y=\sum_{j=1}^{n} y_j u_j$, se tiene:

$$\forall (x,y) \in VxW,\ f(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j\right)=\sum_{i,j} x_i y_j f(e_i,u_j)=\sum_{i,j} x_i y_j a_{ij}$$

donde es $a_{ij} = f(e_i,u_j),\ i=1,...,m,\ j=1,...,n,$

Es decir,

$$\forall (x,y) \in VxW,\ f(x,y)=\sum_{i,j} x_i y_j a_{ij} = (x_1,...,x_m).\left(a_{ij}\right)_{mxn}\begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = X^t AY$$

Esto nos indica que a cada forma bilineal *f* le corresponde una matriz *A* que tiene tantas filas como sea la dimensión del espacio *V*, y tantas columnas como dimensión tenga *W*.

Ejemplo:
Consideremos los R-espacios vectoriales V y W, de dimensiones respectivas 3 y 2, y sean bases de ambos espacios $B_1=\{e_1,e_2,e_3\},\ B_2=\{u_1,u_2\}$. Veamos la imagen mediante la forma bilineal f de los vectores $x=e_1-2e_2+e_3,\ y=-u_1+u_2$:

$f(x,y)= f(e_1-2e_2+e_3,\ -u_1+u_2)=$

$=-f(e_1,u_1)+ f(e_1,u_2)+2f(e_2,u_1)-2f(e_2,u_2)- f(e_3,u_1)+ f(e_3,u_2)$

llamando $a_{ij} = f(e_i,u_j),\ i=1,2,3,\ j=1,2$, se tiene:

$$f(x,y)=-a_{11}+a_{12}+2a_{21}-2a_{22}-a_{31}+a_{32}$$

O bien, en forma matricial:

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 02.1: Dada una forma bilineal $f: VxW \to k$ se verifica que si es A la matriz respecto a las bases $\{e_1,e_2,...,e_m\}\subset V$ y $\{u_1,u_2,...,u_n\}\subset W$, y es A’ la matriz respecto a las bases $\{e_1^{'},e_2^{'},...,e_m^{'}\}\subset V$ y $\{u_1^{'},u_2^{'},...,u_n^{'}\}\subset W$, entonces

$$A' = P.A.Q^t$$

Donde P y Q son las matrices de paso de la base $\{e_i\}_m$ a la base $\{e_h^{'}\}_m$ y de la base $\{u_j\}_n$ a la base $\{u_k^{'}\}_n$, respectivamente

Demostración:

$$\left\{\begin{array}{l} e_h^{'} = \sum_{i=1}^{m} p_{hi} e_i \\ u_k^{'} = \sum_{j=1}^{n} q_{kj} u_j \end{array}\right. \to f(e_h^{'}, u_k^{'}) = f\left(\sum_{i=1}^{m} p_{hi} e_i, \sum_{j=1}^{n} q_{kj} u_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{hi} q_{kj}\, f(e_i, u_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{hi}\, f(e_i, u_j) p_{kj} \to (f(e_h^{'}, u_k^{'})) = (p_{hi})\big(f(e_i, u_j)\big)(q_{jk}) \to$$

$$\to A^{'} = (a_{ij}^{'}) = (p_{hi})(a_{ij})(q_{jk}) = P.A.Q^t$$

Ejemplo:
Consideremos los R-espacios vectoriales V y W, de dimensiones respectivas 3 y 2, y sean bases de ambos espacios $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{u_1, u_2\}$. Consideremos ahora las bases $\{e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}\}$ y $\{u_1^{'}, u_2^{'}\}$ que se obtienen de las anteriores mediante los cambios

$$\left\{\begin{array}{l} e_1^{'} = e_1 - e_3 \\ e_2^{'} = 2e_1 + e_2 + e_3 \\ e_3^{'} = e_1 + e_2 \end{array}\right. \text{ y } \left\{\begin{array}{l} u_1^{'} = 2u_1 - u_2 \\ u_2^{'} = u_1 + u_2 \end{array}\right.$$

es decir, mediante matrices de paso respectivas dadas por:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea la forma bilineal $f : VxW \to k$ definida en las bases $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{u_1, u_2\}$ por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1, u_1) & f(e_1, u_2) \\ f(e_2, u_1) & f(e_2, u_2) \\ f(e_3, u_1) & f(e_3, u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Se cumple que

$$f\left(e_1^{'}, u_1^{'}\right) = f\left(e_1 - e_3, 2u_1 - u_2\right) = 2\, f(e_1, u_1) - f(e_1, u_2) - 2\, f(e_3, u_1) + f(e_3, u_2) = 2.2 - 0 - 2.3 - 2 = -4$$

$$f\left(e'_1,u'_2\right)= f\left(e_1-e_3,u_1+u_2\right)= f(e_1,u_1)+ f(e_1,u_2)- f(e_3,u_1)- f(e_3,u_2)=2+0-3+2=1$$

$$\begin{aligned} f\left(e'_2,u'_1\right)&= f\left(2e_1+e_2+e_3,2u_1-u_2\right)=4\,f(e_1,u_1)-2\,f(e_1,u_2)+2\,f(e_2,u_1)- f(e_2,u_2)+\\ &+2\,f(e_3,u_1)- f(e_3,u_2)=8+2+1+6+2=19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(e'_2,u'_2\right)&= f\left(2e_1+e_2+e_3,u_1+u_2\right)=2\,f(e_1,u_1)+2\,f(e_1,u_2)+ f(e_2,u_1)+ f(e_2,u_2)+\\ &+ f(e_3,u_1)+ f(e_3,u_2)=4+0+1-1+3-2=5 \end{aligned}$$

$$f\left(e'_3,u'_1\right)= f\left(e_1+e_2,2u_1-u_2\right)=2\,f(e_1,u_1)- f(e_1,u_2)+2\,f(e_2,u_1)- f(e_2,u_2)=4+0+2+1=7$$

$$f\left(e'_3,u'_2\right)= f\left(e_1+e_2,u_1+u_2\right)= f(e_1,u_1)+ f(e_1,u_2)+ f(e_2,u_1)+ f(e_2,u_2)=2+0+1-1=2$$

Es decir,

$$A'=\begin{pmatrix} f(e'_1,u'_1) & f(e'_1,u'_2) \\ f(e'_2,u'_1) & f(e'_2,u'_2) \\ f(e'_3,u'_1) & f(e'_3,u'_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 19 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que se verifica la relación establecida en el teorema:

$$P.A.Q^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 19 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}=A'$$

Teorema 02.2: La expresión analítica de una forma bilineal es la misma en los cambios de base.

Demostración:
Sea

$$f(x,y)=(x_1,\dots,x_m).\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots\dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}\equiv X^t.A.Y$$

la expresión matricial en las bases $\{e_1,e_2,\dots,e_m\}\subset V$ y $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}\subset W$

Veamos que también es

$$f(x,y)=(x'_1,...,x'_m).\begin{pmatrix} a'_{11} & ... & a'_{1n} \\ .... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ a'_{m1} & ... & a'_{mn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} \equiv X'^t.A'.Y'$$

en las bases $\{\dot{e}_1, \dot{e}_2, ..., \dot{e}_m\} \subset V$ y $\{\dot{u}_1, \dot{u}_2, ..., \dot{u}_n\} \subset W$.

Como en el anterior teorema, sean P y Q las matrices de paso de la base $\{e_i\}_m$ a la base $\{\dot{e}_h\}_m$ y de la base $\{u_j\}_n$ a la base $\{\dot{u}_k\}_n$, respectivamente. Se tiene, reduciendo la notación:

a) $\left.\begin{matrix} x = x_i e_i \\ x' = \dot{x}_h \dot{e}_h = \dot{x}_h p_{hi} e_i \end{matrix}\right\} \rightarrow x_i = \dot{x}_h p_{hi}, \quad i,h = 1,...,m,$ que podemos expresar:

$$(x_1,...,x_m) = (\dot{x}_1,...,\dot{x}_m).\begin{pmatrix} p_{11} & ... & p_{1m} \\ .... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ p_{m1} & ... & p_{mm} \end{pmatrix} \rightarrow X^t = X'^t.P$$

b) $\left.\begin{matrix} y = y_j u_j \\ y' = \dot{y}_k \dot{u}_k = \dot{y}_k q_{kj} u_j \end{matrix}\right\} \rightarrow y_j = \dot{y}_k q_{kj}, \quad j,k = 1,...,n,$ que podemos expresar:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & ... & q_{n1} \\ .... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ q_{1n} & ... & q_{nn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ ... \\ ... \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} \rightarrow Y = Q^t.Y'$$

Por tanto, se tiene que: $f(x,y) = X^t.A.Y = X'^t.P.A.Q^t.Y'$, y como por el teorema anterior es $A' = P.A.Q^t$, resulta finalmente que $f(x,y) = X^t.A.Y = X'^t.A'.Y'$

A cada forma bilineal f le corresponde, en definitiva, una matriz de orden *mxn*, siendo *m* la dimensión del espacio *V*, y *n* la dimensión del espacio *W*. La comprobación de que esta correspondencia es biyectiva se puede establecer mediante el siguiente teorema de isomorfismo.

Introducción a la idea de forma bilineal

Teorema 02.3: El k-espacio de las formas bilineales $L(V,W;k)$ es isomorfo al k-espacio $Mat_{mxn}(k)$ de las matrices rectangulares de orden *mxn*, siendo el número de filas de estas matrices la dimensión de *V*, $\dim V = m$, y el número de columnas la dimensión de *W*, $\dim W = n$.
Demostración:
Consideremos la aplicación que haga corresponder a cada forma bilineal *f* la matriz correspondiente en un par de bases dadas, esto es:

$$\varphi : L(V,W;k) \to Mat_{mxn}(k)$$

tal que si $\forall f \in L(V,W;k),\ f(x,y) = X^t AY$ entonces

$$\varphi(f) = A \in Mat_{mxn}(k)$$

- Veamos que es un homomorfismo:
  Se tiene que, llamando $\varphi(f) = A_1,\ \varphi(g) = A_2$, será:
  $\forall (x,y) \in VxW, (\alpha f + \beta g)(x,y) = \alpha f(x,y) + \beta g(x,y) = \alpha X^t A_1 Y + \beta X^t A_2 Y =$
  $= X^t \alpha A_1 Y + X^t \beta A_2 Y = X^t(\alpha A_1 + \beta A_2)Y$
  por lo que $\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha A_1 + \beta A_2$, es decir, $\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g)$
- Veamos que es inyectivo:
  se trata de probar que $f, g \in L(V,W;k), \varphi(f) = \varphi(g) \to f = g$.
  Como es $\varphi(f) = A_f,\ \varphi(g) = A_g$ se tiene que
  $\varphi(f) = \varphi(g) \to A_f = A_g \to \forall (x,y) \in VxW,\ X^t A_f Y = X^t A_g Y \to$
  $\to f(x,y) = g(x,y) \to f = g$
- Veamos que es sobreyectivo:
  $\forall A \in Mat_{mxn}(k), \exists h : VxW \to k / \forall x, y \in VxW, h(x,y) = X^t AY$, es decir:
  $\forall A \in Mat_{mxn}(k), \exists h \in L(V,W;k) / \varphi(h) = A$

En definitiva, la aplicación $\varphi : L(V,W;k) \to Mat_{mxn}(k)$ es isomorfismo.

03.Los homomorfismos asociados

Sea la forma bilineal

$$f \in L(V,W;k)$$

Se llama *homomorfismo asociado a f por la derecha* a la aplicación

$$f_d(y): V \to k, \ \forall y \in W$$

definida por la condición de que

$$\forall x \in V, \ f_d(y)(x) = f(x, y) \in k$$

Se llama *homomorfismo asociado a f por la izquierda* a la aplicación

$$f_i(x): W \to k, \ \forall x \in V$$

definida por la condición de que

$$\forall y \in W, \ f_i(x)(y) = f(x, y) \in k$$

Si llamamos V^* al conjunto de las aplicaciones lineales de *V* en *k* (es el espacio dual de *V*), y W^* al conjunto de las aplicaciones lineales de *W* en *k* (espacio dual de *W*), se tiene que, de acuerdo con la definición anterior, es:

$$f_d(y) \in V^*, \quad f_i(x) \in W^*$$

es decir:

$f_d(y): V \to k$, o sea $\forall y \in W, \ f_d(y) \in V^*$ y $f_i(x): W \to k$, o sea $\forall x \in V, \ f_i(x) \in W^*$

o bien:

$$f_d: W \to V^* \text{ y } f_i: V \to W^*$$

Tanto el espacio de todos los homomorfismos a la derecha, $Hom(W, V^*)$, como el espacio de todos los homomorfismos a la izquierda, $Hom(V, W^*)$, resultan ser isomorfos al espacio $L(V, W; k)$ de las formas bilineales sobre ambos espacios vectoriales *V* y *W*. Esto lo mostramos a continuación mediante un sencillo teorema.

Teorema 03.1: Se verifican los isomorfismos siguientes

1) $L(V, W; k) \approx Hom(W, V^*)$
2) $L(V, W; k) \approx Hom(V, W^*)$

Demostración:

1) Bastará definir la aplicación
$$\Phi : L(V,W;k) \to Hom(W,V^*)$$
por la condición
$$\forall f \in L(V,W;k), \Phi(f) = f_d \in Hom(W,V^*)$$
Veamos que se trata de un homomorfismo que es, además, inyectivo y sobreyectivo, es decir, un isomorfismo.

Para ver que se trata de un homomorfismo hemos de comprobar que
$\forall f,g \in L(V,W;k), \forall (a,b) \in k^2, \Phi(af+bg) = a\Phi(f)+b\Phi(g)$
Se tiene que $\forall (x,y) \in VxW$ es $\Phi(af+bg) = (af+bg)_d y$, por definición:
$$\Phi(af+bg) = (af+bg)_d \to \forall (x,y) \in VxW, \Phi(af+bg)(y)(x) = (af+bg)_d(y)(x) =$$
$$= (af+bg)(x,y) = af(x,y)+bf(x,y) = af_d(y)(x)+bg_d(y)(x) =$$
$$= a\Phi(f)+b\Phi(g)$$
Veamos que es inyectivo, es decir, veamos que se verifica la implicación $\Phi(f) = \Phi(g) \to f = g$:
$\forall (x,y) \in VxW,$
$$\left.\begin{array}{l}\Phi(f)(y)(x) = f_d(y)(x) = f(x,y)\\ \Phi(g)(y)(x) = g_d(y)(x) = g(x,y)\end{array}\right\} \to f(x,y) = g(x,y) \to f = g$$
Veamos que también es sobreyectivo, o sea, que
$\forall l \in Hom(W,V^*), \exists h \in L(V,W;k) / \Phi(h) = l$, lo cual es inmediato, ya que la aplicación $h: VxW \to k$ tal que $h(x,y) = l(h)(x) \in k$ es trivialmente bilineal, es decir, $h \in L(V,W;k)$ y además se cumple que $\Phi(h) = l$.

2) Análogamente probamos que se verifica $L(V,W;k) \approx Hom(V,W^*)$, es decir, definiendo $\Phi_2 : L(V,W;k) \to Hom(V,W^*)$ y comprobando del mismo modo que se trata de un isomorfismo.

04. Formas degeneradas, ordinarias y no singulares

Dada la forma bilineal $f \in L(V,W;k)$, se denomina *núcleo de f a la izquierda* al conjunto $V_0 \subseteq V$ tal que
$$\forall x \in V_0, \forall y \in W, \ f(x,y) = 0$$

Asimismo, se denomina *núcleo de f a la derecha* al conjunto $W_0 \subseteq W$ tal que

$$\forall y \in W_0, \forall x \in V, \quad f(x,y) = 0$$

Una forma bilineal $f \in L(V,W;k)$ se dice que es *no degenerada a la izquierda* sii es $V_0 = \{0\}$, y que es *no degenerada a la derecha* sii es $W_0 = \{0\}$.

Caso contrario diríamos que la forma bilineal es *degenerada a izquierda o derecha*, respectivamente.

Una forma bilineal $f \in L(V,W;k)$ se dice que es *no degenerada*, u *ordinaria*, si es no degenerada a izquierda y también no degenerada a derecha:

$$V_0 = \{0\}, \quad W_0 = \{0\}$$

Los conjuntos $V_0 \subseteq V$ y $W_0 \subseteq W$ son trivialmente subespacios vectoriales de *V* y *W*, respectivamente.

Consideremos en *V* y en *W* la relación de equivalencia inducida por el subespacio respectivo V_0 y W_0, y el espacio cociente por tal relación de equivalencia en ambos casos:

$$V/V_0 \text{ y } W/W_0$$

Los conjuntos $L(V/V_0, W;k)$ y $L(V, W/W_0;k)$ son, respectivamente, los k-espacios vectoriales de las formas bilineales de $V/V_0 \times W$ en *k* y de $V \times W/W_0$ en *k*.

Asimismo, es espacio vectorial el conjunto $L(V/V_0, W/W_0;k)$ de las formas bilineales definidas de $V/V_0 \times W/W_0$ en *k*.

Se verifica el siguiente teorema de no degeneración para estos espacios.

Teorema 04.1: Dada una forma bilineal $f \in L(V,W;k)$, de núcleos V_0 y W_0, a izquierda y derecha, respectivamente, se inducen las formas bilineales

Introducción a la idea de forma bilineal

$$f_1 \in L(V/V_0, W; k),\ \ f_2 \in L(V, W/W_0; k) \text{ y } f_r \in L(V/V_0, W/W_0; k)$$

que son, respectivamente:

1) f_1 no degenerada a izquierda.
2) f_2 no degenerada a derecha.
3) f_r no degenerada (ordinaria).

Demostración:

$\forall x \in V$, llamemos $[x] \in V/V_0$ a la clase de equivalencia a la que pertenece x.

$\forall y \in W$, llamemos $[y] \in W/W_0$ a la clase de equivalencia a la que pertenece y.

1) Definamos $f_1 : V/V_0 \times W \to k$ por $\forall x \in V, \forall y \in W,\ f_1([x], y) = f(x, y) \in k$

- f_1 es aplicación, pues si $([x], y) = ([x'], y) \to [x] = [x'] \to x - x' \in V_0 \to$
  $\to f(x - x', y) = 0 \to f(x, y) - f(x', y) = 0 \to f(x, y) = f(x', y) \to$
  $\to f_1([x], y) = f_1([x'], y)$
- f_1 es bilineal obviamente, por ser *f* bilineal.
- f_1 es no degenerada a izquierda, es decir, si $f_1([x], y) = 0 \to [x] = 0$, puesto que
  $\forall y \in W,\ f_1([x], y) = f(x, y) = 0 \to x \in V_0 \to [x] = 0$

2) Definamos $f_2 : V \times W/W_0 \to k$ por $\forall x \in V, \forall y \in W,\ f_2(x, [y]) = f(x, y) \in k$

- f_2 es aplicación, pues si $(x, [y]) = (x, [y']) \to [y] = [y'] \to y - y' \in W_0 \to$
  $\to f(x, y - y') = 0 \to f(x, y) - f(x, y') = 0 \to f(x, y) = f(x, y') \to$
  $\to f_2(x, [y]) = f_2(x, [y'])$
- f_2 es bilineal obviamente, por ser *f* bilineal.
- f_2 es no degenerada a derecha, es decir, si $f_2(x, [y]) = 0 \to [y] = 0$, puesto que
  $\forall x \in V,\ f_2(x, [y]) = f(x, y) = 0 \to y \in W_0 \to [y] = 0$

3) Es inmediato, desde los apartados 1) y 2) anteriores. La forma f_r se denomina también *forma reducida*.

Teorema 04.2: Se verifican las equivalencias siguientes

1) $f \in L(V, W; k)$ no degenerada a izquierda $\leftrightarrow f_i$ es monomorfismo.
2) $f \in L(V, W; k)$ no degenerada a derecha $\leftrightarrow f_d$ es monomorfismo.

Demostración:

Sabemos que tanto f_i como f_d son homomorfismos. Se trata de probar que con la condición de no degeneración, son necesariamente inyectivos. Esto es:
$x_1, x_2 \in V,\ f_i(x_1) = f_i(x_2) \to x_1 = x_2$ y $y_1, y_2 \in W,\ f_d(y_1) = f_d(y_2) \to y_1 = y_2$
1) f no degenerada $\leftrightarrow V_0 = \{0\} \wedge W_0 = \{0\}$
por lo que $x \in V_0 \leftrightarrow \forall y \in W,\ f_i(x)(y) = f(x, y) = 0 \leftrightarrow f_i(x) = 0 \leftrightarrow x \in \ker f_i$
por tanto es $V_0 = \ker f_i = \{0\}$
Si $f_i(x_1) = f_i(x_2) \to f_i(x_1) - f_i(x_2) = 0 \to f_i(x_1 - x_2) = 0 \to x_1 - x_2 \in \ker f_i$
Y como $\ker f_i = \{0\}$: $x_1 - x_2 \in \ker f_i = \{0\} \leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \to x_1 = x_2$
Luego, el homomorfismo f_i es inyectivo, y por consiguiente, monomorfismo.
2) La demostración de que f_d es inyectivo es análoga, repitiendo los mismos pasos:
$y \in W_0 \leftrightarrow \forall x \in V,\ f_d(y)(x) = f(x, y) = 0 \leftrightarrow f_d(y) = 0 \leftrightarrow y \in \ker f_d$
y también es $W_0 = \ker f_d = \{0\}$

Se dice que $f \in L(V, W; k)$ es una forma bilineal *no singular a la derecha* sii f_d es isomorfismo, y *no singular a la izquierda* sii f_i es isomorfismo.
f se dirá *no singular* sii tanto f_i como f_d son isomorfismos.

La no degeneración no implica la necesariamente la singularidad, pues por el anterior teorema, ambos homomorfismos asociados habrían de ser sólo monomorfismos, no necesariamente isomorfismos.

05.Ortogonalidad de vectores con respecto a una forma bilineal

05.1. Definición:
Dados dos k-espacios vectoriales, *V* y *W*, se dice que $x \in V$ es ortogonal a $y \in W$ respecto a la forma $f \in L(V, W; k)$ sii es $f(x, y) = 0$.

Podemos indicar la ortogonalidad de los vectores x e y por $x \perp y$, cuando se sobreentiende cuál es la forma bilineal que define la ortogonalidad.

Sean *P(V)* y *P(W)* los conjuntos de las partes de *V* y *W*, respectivamente (ambos conjuntos son álgebras de Boole), y consideremos la aplicación

$$\omega : P(V) \to P(W)$$

definida por la condición

$$\forall M \in P(V), \omega(M)=\{y\in W / x\perp y, \forall x\in M\}$$

esto es, la aplicación que hace corresponder a cada parte de V el conjunto de elementos de W que son ortogonales a todos y cada uno de los elementos de M.

Análogamente podemos definir

$$\omega' : P(W)\to P(V)$$

por la condición

$$\forall N \in P(W), \omega'(N)=\{x\in V / x\perp y, \forall y\in N\}$$

(son los elementos de V que son ortogonales a cada elemento de la parte N de W)

05.2. Propiedades:

Teorema 05.1: Sean los k-espacios vectoriales V y W, de dimensiones respectivas $\dim V=m$ y $\dim W=n$. Se verifica:

01) $M\subseteq M' \to \omega(M')\subseteq\omega(M)$.
02) $M\subseteq\omega^2(M)$.
03) $\omega(M)=\omega^3(M)$.
04) $\omega(M)$ es subespacio vectorial de W.
05) Si es $L(M)$ la variedad lineal engendrada por M, $\omega(M)=\omega(L(M))$.
06) $\forall M,N\in P(V), \omega(M\cup N)=\omega(M+N)=\omega(M)\cap\omega(N)$.
07) Si son M, N variedades lineales, $\omega(M)\cup\omega(N)\subseteq\omega(M)+\omega(N)\subseteq\omega(M\cap N)$
08) $V_0=\ker f_i$ y $W_0=\ker f_d$.
09) $\dim(V/\omega(W))=\dim(W/\omega(V))$.
10) Si es *M* variedad lineal de *V* y *f* es ordinaria: $co\dim(\omega(M))=\dim M$.
11) Si es *f* ordinaria, *M* variedad lineal y m=n $\to \omega^2(M)=M$.
12) Si es *f* ordinaria, *M, M'* var. lineales y m=n $\to \omega(M)\cap\omega(M')=\omega(M)+\omega(M')$

Demostración:

01) Se debe al carácter restrictivo de la condición de ortogonalidad: siempre es mayor (o igual) el número $\omega(M)$ de vectores ortogonales a los vectores del conjunto M, que el número de vectores que siendo ortogonales a M también son ortogonales a otros vectores no contenidos en *M, M'-M*, por lo que siempre será $\omega(M')\subseteq\omega(M)$.

02) El conjunto $\omega(M)$ contiene todos los vectores ortogonales a M, que también pueden ser ortogonales a otros vectores exteriores a M, por lo que el

conjunto $\omega^2(M)=\omega(\omega(M))$ de los vectores ortogonales a $\omega(M)$ no es solo M, sino que también contiene a los vectores que siendo exteriores a M son ortogonales a los vectores de $\omega(M)$. Es decir, $M\subseteq\omega^2(M)$.

03) Del apartado 02), $M\subseteq\omega^2(M)$, por lo que aplicando el apartado 01), ha de ser $\omega^3(M)\subseteq\omega(M)$. Pero también se deduce de 02), sustituyendo M por $\omega(M)$, que $\omega(M)\subseteq\omega^2(\omega(M))=\omega^3(M)$, por lo que

$$\left.\begin{array}{l}\omega^3(M)\subseteq\omega(M)\\ \omega(M)\subseteq\omega^3(M)\end{array}\right\}\rightarrow\omega(M)=\omega^3(M)$$

04) Bastará comprobar que $\forall y,z\in\omega(M),\forall a,b\in k,\ ay+bz\in\omega(M)$. Se tiene, efectivamente, que

$$\forall x\in M,\ f(x,ay+bz)=af(x,y)+bf(x,z)=0+0=0\rightarrow ay+bz\in\omega(M)$$

05) Del apartado 01), $M\subseteq L(M)\rightarrow\omega(L(M))\subseteq(M)$

por otra parte: $\forall x\in L(M),\ x=\sum a_i x_i,\ x_i\in M$, por lo que, $\forall y\in\omega(M)$ es

$f(x,y)=\left(\sum a_i x_i,y\right)=\sum(a_i x_i,y)=\sum a_i(x_i,y)=\sum 0=0\rightarrow y\in\omega(L(M))$, es decir: $\omega(M)\subseteq\omega(L(M))$

de ambas inclusiones se deduce la igualdad

$$\left.\begin{array}{l}\omega(L(M))\subseteq(M)\\ \omega(M)\subseteq\omega(L(M))\end{array}\right\}\rightarrow\omega(M)=\omega(L(M))$$

06) Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}M\subseteq M\cup N\\ N\subseteq M\cup N\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\omega(M\cup N)\subseteq\omega(M)\\ \omega(M\cup N)\subseteq\omega(N)\end{array}\right\}\rightarrow\omega(M\cup N)\subseteq\omega(M)\cap\omega(N)$$

por otra parte:

$[\forall y\in\omega(M)\cap\omega(N)\rightarrow y\in\omega(M)\wedge y\in\omega(N)\rightarrow\forall x\in M\cup N,\ f(x,y)=0\rightarrow$
$\rightarrow y\in\omega(M\cup N)]\rightarrow\omega(M)\cap\omega(N)\subseteq\omega(M\cup N)$

entonces, de ambas inclusiones:

$$\left.\begin{array}{l}\omega(M\cup N)\subseteq\omega(M)\cap\omega(N)\\ \omega(M)\cap\omega(N)\subseteq\omega(M\cup N)\end{array}\right\}\rightarrow\omega(M\cup N)=\omega(M)\cap\omega(N)$$

Si M,N fueran variedades lineales, entonces $L(M\cup N)=M+N$, por lo que $\omega(M+N)=\omega(L(M\cup N))$. Por el apartado 5): $\omega(M+N)=\omega(M\cup N)$, y por el apartado 6): $\omega(M+N)=\omega(M\cup N)=\omega(M)\cap\omega(N)$

07) Trivial.
08) Trivial.
09) Por el teorema 04.2, si consideramos que es $f_r \in L(V/\omega(W), W/\omega(V); k)$ reducida, se tienen los homomorfismos asociados:

$f_{ri} : V/\omega(W) \to (W/\omega(V))^*$ monomorfismo

$f_{rd} : W/\omega(V) \to (V/\omega(W))^*$ monomorfismo

de lo cual:

$$\dim(V/\omega(W)) \leq \dim(W/\omega(V))^* = \dim(W/\omega(V))$$

$$\dim(W/\omega(V)) \leq \dim(V/\omega(W))^* = \dim(V/\omega(W))$$

y de ambas desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} \dim(V/\omega(W)) \leq \dim(W/\omega(V)) \\ \dim(W/\omega(V)) \leq \dim(V/\omega(W)) \end{array}\right\} \to \dim(V/\omega(W)) = \dim(W/\omega(V))$$

10) Si aplicamos la propiedad anterior a la restricción de *f* a $M \times W$, se tiene: $\dim(M/\omega(W)) = \dim(W/\omega(M))$ y como tanto f como su restricción son ordinarias a izquierda, se tiene que $\omega(W) = \{0\}$. Por tanto:

$$\dim M = \dim(M/\omega(F)) = \dim(F/\omega(M)) = co\dim(\omega(M))$$

11) Del apartado 02): $M \subseteq \omega^2(M)$

y del apartado 10): $\dim \omega M = co\dim(\omega^2(M)) = m - \dim(\omega^2(M))$

$$\dim M = co\dim(\omega(M)) = n - \dim(\omega(M))$$

por tanto

$$\dim M = n - \dim(\omega(M)) = n - \left(m - \dim(\omega^2(M))\right) = (n - m) + \dim(\omega^2(M))$$

y como por hipótesis es m=n: $\dim M = \dim(\omega^2(M)) \to M = \omega^2(M)$

12) Del apartado 07): $\omega(M) + \omega(N) \subseteq \omega(M \cap N)$

del apartado 10):

$$\dim(\omega(M \cap N)) = n - \dim(M \cap N) = n - \{\dim M + \dim N - \dim(M+N)\} =$$

$$= (n - \dim M) + (n'\dim N) - (n - \dim(M+N)) =$$

$$= \dim(\omega(M)) + \dim(\omega(N)) - \dim(\omega(M+N)) = \dim(\omega(M) + \omega(N))$$

por consiguiente:

$$\dim(\omega(M \cap N)) = \dim(\omega(M) + \omega(N)) \to \omega(M \cap N) = \omega(M) + \omega(N)$$

06. El rango de una forma bilineal

De ser

$$\left.\begin{array}{r} V_0 = \omega(W) = \ker f_d \\ W_0 = \omega(V) = \ker f_i \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} imagf_i \cong V/\ker f_i = V/\omega(W) \\ imagf_d \cong W/\ker f_d = W/\omega(V) \end{array}\right\} \rightarrow V/\omega(W) = W/\omega(V)$$

Se define el rango de la forma bilineal $f \in L(V, W; k)$ como la dimensión de ambos espacios cocientes.

Es decir:

$$rang(f) = \dim\left(V/\omega(W)\right) = \dim\left(W/\omega(V)\right)$$

Teorema 06.1: Se verifican las equivalencias siguientes

1) f_i *monomorfismo* $\leftrightarrow f_d$ *epimorfismo*

2) f_d *monomorfismo* $\leftrightarrow f_i$ *epimorfismo*

Demostración:

1) f_i *monomorfismo* $\leftrightarrow \ker f_i = \omega(W) = \{0\} \leftrightarrow rang(f) = \dim V =$
$= \dim V^* = \dim \operatorname{Im} gf \leftrightarrow imagf_d = V^* \rightarrow f_d$ *epimorfismo*

2) La prueba es análoga.

Corolario:

– f *ordinaria* $\rightarrow f_i, f_d$ *isomorfismos* $\rightarrow f$ *no* sin *gular*
– f *no* sin *gular* $\rightarrow f$ *ordinaria*

Bibliografía

Noble, B.; Daniel, J.W., Applied Linear Algebra, Prentice Hall, Londres, 1988.

Sainz, M.A.; Serarols, J.L.; Pérez A. M., Algebra, Escuela Politécnica Superior, Gerona, 1994.

Sancho, J., Algebra Lineal y Geometría, Universidad de Zaragoza, 1994.