ALEPH SUB – CERO
SERIE DE DIVULGACIÓN
$\aleph_0$ 2015 - II $\aleph_0$
pp. 5 - 52

TEORÍA QUÁNTICA DE CAMPOS TOPOLÓGICA

(Topological Quantum Field Theory)

Adunador: **ALBERTO MEJÍAS***

Recepción: Julio 2015. Revisión y aceptación: Agosto 2015.

Resumen. Se formula una versión de teoría de calibración supersimétrica 4-dimensional. El modelo, que refina a un tratamiento no relativístico por ATIYAH, parece subyacer en muchos desarrollos recientes en topología de variedades de bajas dimensiones; las invariantes polinómicas DONALDSON de 4-variedades y los grupos FLOER de 3-variedades, aparecen naturalmente. El modelo también puede ser interesante desde el punto de vista físico; es, en cierto sentido, una teoría quántica de campos generalmente covariante, aunque una en la cual la covariancia general es inquebrantable, no hay gravitones y las únicas excitaciones son topológicas.

Descriptores. Teoría Quántica de Campos, Invariantes Topológicas, Homologías, Polinomios DONALDSON, Teorías de Calibración Supersimétricas.

Abstract. A twisted version of four dimensional supersymmetric gauge theory is formulated. The model, which refines a nonrelativistic treatment by ATIYAH, appears to underlie many recent developments in topology of low dimensional manifolds; the DONALDSON polynomial invariants of 4-manifolds and the FLOER groups of 3-manifolds appear naturally. The model may also be interesting from a physical viewpoint; it is in a sense a generally covariant quantum field theory, albeit one in which general covariance is unbroken, there are no gravitons, and the only excitations are topological.

Keywords. Quantum Field Theory, Topological Invariants, Homologies, DONALDSON polynomials, Supersymmetric Gauge Theories.

---

* ALBERTO R. MEJÍAS E. es Licenciado en Matemáticas, egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes (ULA) Mérida-Venezuela. Es profesor de Topología, jubilado por la Universidad de los Andes. alrame59@gmail.com

Adunador: **ALBERTO MEJÍAS**

1 INTRODUCCIÓN

Uno de los acontecimientos espectaculares en matemáticas ha sido el programa iniciado por DONALDSON, de estudiar la topología de las variedades de bajas dimensiones, mediante la teoría c1ásica no lineal de campos [1, 2]. El trabajo de DONALDSON utiliza detenidamente, las ecuaciones YANG-MILLS auto-duales que primero, fueron introducidas por los físicos [3] y depende de algunos importantes resultados obtenidos originalmente por los físicos matemáticos, por ejemplo el Teorema de TAUBES, sobre existencia de instantones sobre ciertas 4-variedades tersas [4] (así como el análisis detallado de espacios de módulos de instantones [5]). Por lo tanto, se ha conjeturado que el trabajo de DONALDSON puede estar relacionado a ideas físicas de una manera íntima. Sin embargo, una tal relación no ha sido evidente en las detalladas construcciones de DONALDSON.

Esta imagen ha cambiado considerablemente debido a la labor de FLOER sobre 3-variedades [6]. El trabajo de FLOER involucra amplitudes de tunelado en 3 + 1 dimensiones y ha sido interpretado por ATIYAH [7] en términos de una versión modificada de la teoría quántica supersimétrica de calibración. (La teoría FLOER también ha sido revisada en [8]). Desde este punto de vista, la teoría FLOER puede ser considerada como una generalización al espacio infinito-dimensional de funciones del enfoque supersimétrico a la teoría MORSE [9].

Los grupos de homología FLOER son entonces, los estados fundamentales de un cierto hamiltonano H, lo cual está estrechamente relacionado con las teorías de campos de la física quántica. El hamiltonano H, que será descrito más adelante, contiene campos anticonmutativos de espín entero. Puesto que H también actúa en un espacio HILBERT de métrica positiva, el teorema de estadística del espín implica que la teoría no debe ser invariante LORENTZ. Es fácil ver que esto es así (los campos anticonmutativos no forman multipletes LORENTZ y no hay invariancias por calibración anticonmutativas).

Sólo desde el punto de vista de la teoría FLOER, que es una teoría de las 3-variedades, es suficiente una descripción no relativística. Pero uno de los rasgos más bellos de la teoría FLOER es su conexión con la teoría DONALDSON de las 4-variedades. Las invariantes polinómicas DONALDSON de las 4-variedades se definieron originalmente para una 4-variedad M sin bordes. Ha resultado que para generalizar las definiciones originales de DONALDSON, al caso en el cual M tiene borde no vacío B, hay que definir invariantes DONALDSON relativas, de M, que toman valores en los grupos FLOER de B. Esta conexión entre las teorías FLOER y DONALDSON, ha llevado a ATIYAH a conjeturar que la interpretación en "Teoría MORSE", de homología FLOER, debe ser una aproximación a una teoría quántica relativística de campos. Esa conjetura fue la motivación para el presente trabajo. Nos encontraremos con una formulación relativística que resulta requerir una generalización no enteramente trivial del tratamiento no relativístico, en [7]. Esta generalización se describe en Sección 2. En Secs. 3 y 4, se describe, desde este punto de vista, el origen de los polinomios DONALDSON y su conexión con la teoría FLOER. En Sec. 5, se elaboran algunas fórmulas explícitas. Finalmente, en Sec. 6, se discute la posible interpretación física de este trabajo.

Hay varios resultados sobre instantones en las literaturas de matemática y física, que son antecedentes importantes para el presente trabajo. 'T HOOFT [10], utilizó instantones para resolver el "problema de $U(1)$" y fueron interpretados en términos de tunelado, en [11, 12]. La teoría formal de deformaciones de instantones, relevante en Sec. 3 y después, se desarrolló en [13]. Además, se han descubierto muchas notables propiedades de instantones en teorías de calibración supersimétricas, en la literatura de física. En particular, las ideas de [14, 15] pueden ser importantes para futuros desarrollos en teorías FLOER y DONALDSON, quizás relacionado con el papel de las conexiones reducibles. Nuestro tratamiento de polinomios DONALDSON en el Sec. 3 tiene una estrecha semejanza formal con los argumentos dados en [16] para determinar ciertas funciones de correlación en teorías de calibración supersimétricas fuertemente acopladas. Por último, nótese que muchos argumentos en Sec. 3 y después, serán muy reconocibles por los teorizantes de cuerdas. Esta analogía en realmente, tentadora y es proseguida en Sec. 6. Una introducción a la teoría de cuerdas correspondiente, se tiene en [17-19].

2 CONSTRUCCIÓN DEL LAGRANGEANO

Primero recordemos la descripción de la teoría FLOER en una teoría quántica no relativística [7]. Se comienza con campos de calibración $A_i^a(x)$ sobre una 3-variedad Y. Aquí $i = 1, 2, 3$, marca a los componentes de un vector tangente a M, a varía sobre los generadores de un grupo de calibración G y x denota a un punto de Y. Y está dotado de un tensor métrica g_{ij}. Deseamos considerar formas diferenciales sobre el espacio $\mathscr{A}$ de todas las conexiones de calibración sobre Y.[1] Una base para

[1] La relación de las formas diferenciales en el espacio de funciones, con campos quánticos, fue descrita para modelos sigma en [20], lo cual puede servir como fondo contextual.

las 1-formas serían $\delta A_i^a(x)$.[2] Las $\delta A_i^a(x)$ pueden considerarse como operadores sobre las formas diferenciales sobre $\mathscr{A}$ [si ω es una forma diferencial sobre $\mathscr{A}$, entonces $\delta A_i^a(x)$ actúa sobre ω, por $\omega \to \delta A_i^a(x) \wedge \omega$]. Considerados entonces, como operadores sobre formas diferenciales, los $\delta A_i^a(x)$ anticonmutan: $\{\delta A_i^a(x), \delta A_j^b(y)\} = 0$. Por lo tanto corresponden a campos FERMI segundo-quantizados. Siguiendo la terminología física, se denota a los $\delta A_i^a(x)$ como $\psi_i^a(x)$.

La derivada exterior en $\mathscr{A}$, es

$$d = \int d^3x \psi_i^a(x) \frac{\delta}{\delta A_i^a(x)}. \tag{2.1}$$

Su adjunta es

$$d^* = -\int d^3x \chi_i^a(x) \frac{\delta}{\delta A_i^a(x)}, \tag{2.2}$$

donde los $\chi_i^a(x)$ [campos vectoriales sobre $\mathscr{A}$, duales a los $\psi_i^a(x)$] satisfacen $\{\chi_i^a(x), \chi_j^b(y)\} = 0$, $\{\chi_i^a(x), \psi_j^b(y)\} = g_{ij}\delta^{ab}\delta^3(x-y)$. Luego se considera al funcional CHERN-SIMONS $W = \frac{1}{2}\int_Y \mathrm{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A)$ como una función MORSE sobre Y. Luego, al igual que en dimensiones finitas [9], se introduce un número real t y se define a $d_t = e^{-tW} d e^{tW}$, $d_t^* = e^{tW} d^* e^{-tW}$ como las "cargas de supersimetría". Satisfaciéndose

$$d_t^2 = 0, \qquad d_t^{*2} = 0, \qquad d_t d_t^* + d_t^* d_t = 2H, \tag{2.3}$$

donde H, definido por la última ecuación, es el hamiltonano de la teoría no relativística. Explícitamente,

---

[2] Esto es, para cada x, i, a, consideramos a $A_i^a(x)$ como una función ó 0-forma sobre $\mathscr{A}$ y a $\delta A_i^a(x)$ como una 1-forma que es la derivada exterior de la 0-forma $A_i^a(x)$. El símbolo δ denota simplemente a la derivada exterior sobre el espacio de funciones $\mathscr{A}$.

$$H = \int d^3x \Big[\frac{1}{2} \sum_{i,a} \Big(-i \frac{\delta}{\delta A_i^a(x)} \Big)^2 + \frac{t^2}{2} \mathrm{Tr}\, B_i B^i + t \cdot \varepsilon_{ijk} \mathrm{Tr}\, \psi^i D^j \chi^k \Big] \qquad (2.4)$$

con $B_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{jk}$, $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j]$.[3] En los dos primeros términos (2.4), se reconoce al hamiltonano de la teoría bosónica YANG-MILLS convencional (invariante LORENTZ). El último término es un acoplamiento no invariante LORENTZ, con los fermiones. (Los fermiones tienen espín uno, que sería imposible si el acoplamiento fuera invariante LORENTZ). Como se describe en [7], los estados fundamentales de (2.4) son los grupos FLOER (racionales) de Y. Estos grupos son graduados por un número quántico aditivo que llamamos U, con $U = 1$ Para ψ y $U = -1$ para χ. (en dimensiones finitas, U correspondería a la graduación de los complejos DE RHAM por dimensión.) En virtud de los instantones, U sólo es conservada modulo una constante; para $SU(2)$: la constante es 8.

2.1 Generalización Relativística

Al tratar de encontrar una versión relativística de esta estampa, nuestro primer problema es decidir cuál será el álgebra de supersimetría. En (2.3), aparece el generador H de traslaciones tempóricas. Hay una noción natural de traslaciones de tiempo cuando trabajamos sobre $Y \times R^1$ (Y es "espacio" y R^1 es "tiempo"). Sin embargo, la teoría DONALDSON se aplica a una 4-variedad (compacta, tersa) general. Sobre una 4-variedad general, no hay ninguna noción natural de " traslaciones tempóricas", así que uno debe trabajar con un álgebra de supersimetría más pequeña, en el que no aparece H. Esto significa que no podemos mantener tanto a d_t como a d_t^* en la teoría intrínseca 4-dimensional. Debemos tener un solo generador de supersimetría, digamos d_t, que llamaremos Q; satisfará simplemente a $Q^2 = 0$. [Veremos cómo recuperar el álgebra (2.3) si uno se especializa en una 4-variedad $Y \times R^1$.] Satisfaciendo a $Q^2 = 0$, Q será bastante similar a una carga BRST y supondre-

[3] Nuestros convenios en teoría de calibración son que la derivada covariante de un campo cargado ϕ, es $D_i \phi = \partial_i \phi + [A_i, \phi]$. Bajo una transformación infinitesimal de calibración con $\delta\phi = [\varepsilon, \phi]$, la transformación de A_i, es $\delta A_i = -D_i \varepsilon$. Consideramos al generador del grupo calibración G, como matrices reales, anti-simétricas en la representación adjunta y cualquier campo ϕ con valores en la representación adjunta, cuando no está descrito explícitamente por componentes ϕ^a, es una tal matriz real, anti-simétrica. El símbolo "Tr" denota a la forma CARTAN-KILLING definida positiva sobre el álgebra LIE de G.

mos que desempeña un papel a lo BRST, para identificar estados físicos; los estados físicos ψ serán estados que satisfacen obedeciendo $Q\psi = 0$, módulo los de forma $\psi = Q\lambda$.[4] Resultará que los estados físicos en ese sentido, son sólo los grupos FLOER. De esta manera, los estados de norma negativa que uno habría esperado en una teoría invariante LORENTZ con campos anticonmutativos de espín entero desaparecen.[5] A pesar de este papel como BRST, de la supercarga Q, no tenemos idea de cómo obtener el lagrangeano invariante "BRST", considerado abajo, mediante el ajuste de calibración de un lagrangeano invariante por calibración. En Sec. 6 se argumentará que un tal lagrangeano tendría que ser generalmente covariante, de un nuevo tipo.

Al tratar de extender (2,4) a una teoría invariante LORENTZ, el siguiente problema es llevar los campos A_i^a, ψ_i^a, χ_i^a a multipletes LORENTZ. Claramente, el campo de calibración A_i^a está en una parte del cuadro 4-dimensional de una 1-forma A_α^a, $\alpha = 1 \ldots 4$ (con valores en un álgebra LIE). (Los índices de tangentes a una 4-variedad M, se denotarán por α, β, γ.) En cuanto a ψ y χ, consideraremos a estos como una 1-forma ψ_α^a y una 2-forma auto-dual $\chi_{\alpha\beta}^a$ (así, $\chi_{\alpha\beta}^a = -\chi_{\beta\alpha}^a = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\chi^{\gamma\delta\alpha}$). Además, complementaremos esto con una 0-forma η^a de $U = -1$. La lógica detrás de estas elecciones es que se sabe que el multiplete $(\eta, \psi_\alpha, \chi_{\alpha\beta})$ desempeña un papel en problemas de módulos de instantones 4-dimensionales, análogo al papel de (ψ_i, χ_i) en teoría FLOER.[6]

Intentemos elaborar una teoría supersimétrica de estos campos. El único lagrangeano razonable (invariante por escala, que preserva a U) que podemos escribir es

---

[4] La quantización BRST de teorías de calibración se presentó en [21, 22]. El papel de la carga BRST en la identificación de estados físicos surgió en [23].

[5] Un fenómeno similar ocurre en la teoría de cuerdas en el teorema sin fantasmas (teorema GODDARD–THORN). Este aspecto de la analogía entre teoría DONALDSON y teoría de cuerdas fue sugerido por D. FRIEDAN.

[6] Ver [13, 2] para el contexto; una breve semblanza aparece en Sec. 3, más abajo.

$$\mathscr{L} = \int_M \mathrm{Tr}[\tfrac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - i\eta D_\alpha \psi^\alpha + i(D_\alpha \psi_\beta)\chi^{\alpha\beta}]. \tag{2.5}$$

En cuanto a las leyes de transformación de supersimetría, el único intento razonable es

$$\delta A_\alpha = i\varepsilon \psi_\alpha, \qquad \delta\eta = 0, \qquad \delta\psi_\alpha = 0, \qquad \delta\chi_{\alpha\beta} = \varepsilon(F_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\gamma\delta}) \tag{2.6}$$

con ε un parámetro constante anticonmutativo.

Se ve rápidamente que (2.5) es invariante con respecto a (2.6) si el grupo de calibración es abeliano; pero, en caso de no abeliano, hay un término no cancelado de la forma $\varepsilon \mathrm{Tr}\eta[\psi_\alpha, \psi^\alpha]$. No hay manera de evitar esto, excepto mediante la adición de más campos. Heurísticamente, deberíamos esperar tener que agregar más bosones, porque hemos añadido nuevos fermiones (η y ψ_0) a la teoría supersimétrica no relativística. (La adición de A_0 a la teoría no relativística, va en la dirección incorrecta, porque implica una restricción, en lugar de ser un campo físico de propagación). Para conjeturar qué nuevos campos se requieren, se puede notar que los modos de propagación de A_α tienen helicidades (1, -1), mientras que los modos de propagación de (η, ψ, χ) tienen helicidades (1, –1, 0, 0). Puesto que el parámetro de supersimetría ε no lleva espín, la supersimetría requerirá que los modos de propagación de los campos conmutativos y anticonmutativos deban tener la misma helicidad. Por lo tanto, necesitamos dos modos cero conmutativos de helicidad y para acomodarlos introducimos dos nuevos campos sin espín ϕ y λ (en la representación adjunta del grupo calibración).

Un pequeño experimento conduce al lagrangeano

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0 = \int_M d^4x\, \mathrm{Tr}\Big[&\tfrac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\phi D_\alpha D^\alpha \lambda - i\eta D_\alpha \psi^\alpha + iD_\alpha \psi_\beta \cdot \chi^{\alpha\beta} \\ &- \tfrac{1}{8}\phi[\chi_{\alpha\beta}, \chi^{\alpha\beta}] - \tfrac{1}{2}\lambda[\psi^\alpha, \psi_\alpha]\Big].\end{aligned} \tag{2.7}$$

Este lagrangeano es invariante bajo la simetría fermiónica

$$\begin{aligned}&\delta A_\alpha = i\varepsilon\psi_\alpha, \qquad \delta\phi = 0, \qquad \delta\lambda = 2i\varepsilon\eta, \quad \delta\eta = \tfrac{1}{2}\varepsilon[\phi, \lambda] \qquad \delta\psi_\alpha = -\varepsilon D_\alpha \phi, \\ &\delta\chi_{\alpha\beta} = \varepsilon(F_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\gamma\delta}).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Esta acción también es invariante con respecto al escalamiento global, si las dimensiones de escalamiento de (A, ϕ, λ, η, ψ, χ) son (1, 0, 2, 2, 1, 2) y conserva la simetría U aditiva si las asignaciones de U son (0, 2, –2, –2, –1, 1, –1).

Ahora consideremos al álgebra satisfecha por la simetría fermiónica. Sea $\delta_\varepsilon(\Phi)$ la variación de cualquier campo Φ con respecto a (2.8). Sea $T_\sigma(\Phi)$ la variación de Φ en una transformación de calibración generada por un parámetro infinitesimal σ (el campo de calibración A_α se transforma como $T_\sigma(A_\alpha) = -D_\alpha\sigma$ y los campos cargados Φ se transforman como $T_\sigma(\Phi) = [\sigma, \Phi]$. Así, se puede verificar que para todo Φ,

$$(\delta_\varepsilon \delta_{\varepsilon'} - \delta_{\varepsilon'} \delta_\varepsilon)(\Phi) = T_\varrho(\Phi), \tag{2.9}$$

donde

$$\varrho^a = -2i\varepsilon\varepsilon' \cdot \phi^a. \tag{2.10}$$

Así que el conmutador de dos transformaciones de supersimetría, es una transformación de calibración, con parámetro infinitesimal ϱ^a. Al verificar (2.9) para $\Phi = A, \phi, \lambda, \eta, \psi$, no se necesita utilizar las ecuaciones de movimiento; pero, para $\Phi = \chi$ deben utilizarse las ecuaciones de movimiento.

El lagrangeano (2.7) no está unívocamente está determinado por sus simetrías. La razón de esto es la siguiente. Definamos una transformación lineal $\{Q, \}$, del espacio de los funcionales de las variables de campo, como sigue. $\{Q, \}$ se define estableciendo que para cualquier funcional $\mathcal{O}$, la variación $\delta\mathcal{O}$ de $\mathcal{O}$ con respecto a la simetría fermiónica (2.8), es

$$\delta\mathcal{O} = -i\varepsilon \cdot \{Q, \mathcal{O}\}. \tag{2.11}$$

[Aquí $\{Q, V\}$ es simplemente, una transformación lineal en un espacio adecuado de funcionales de $A, \phi, \lambda, \eta, \psi, \chi$]. La justificación para escribir esta transformación como $\{\mathrm{Q}, \mathcal{O}\}$ y no meramente como $\mathrm{Q}(\mathcal{O})$ es simplemente que en el marco hamiltonano, esta transformación realmente, corresponde al conmutador graduado de $\mathcal{O}$ con la sobrecarga Q, definido más adelante]. En razón de que $Q^2 = 0$, $\{Q, \mathcal{O}\}$ es Q invariante y se puede agregar al lagrangeano sin perturbar la simetría fermiónica. En realidad, ya que la prueba de que $Q^2 = 0$, utiliza la ecuación de movimiento de χ, sólo tenemos derecho de añadir $\{Q, \mathcal{O}\}$ al lagrangeano si χ no aparece en $\mathcal{O}$. Además, puesto que Q^2 es solamente cero, salvo una transformación de calibración, debemos elegir $\mathcal{O}$ invariante por calibración. En la práctica, hay una opción de $\mathcal{O}$ que respeta a todas las simetrías, a saber $\mathcal{O} = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}[\phi, \lambda]\eta$. Esto nos da la posibilidad de añadir al lagrangeano, un nuevo término,

$$\mathscr{L}_1 = s\int d^4x\{Q, \mathcal{O}\} = s\int d^4x\, \mathrm{Tr}\left[\frac{i}{2}\phi[\eta, \eta] + \frac{1}{8}[\phi, \lambda]^2\right], \tag{2.12}$$

donde s es un parámetro arbitrario. Algunas de nuestras consideraciones más adelante, se simplificarán si añadimos (2.12) con $s = -1$ y, así, el lagrangeano que utilizamos para muchos propósitos, será realmente

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \int_M d^4x\,\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\Big[&\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\phi D_\alpha D^\alpha\lambda - i\eta D_\alpha\psi^\alpha + iD_\alpha\psi_\beta\cdot\chi^{\alpha\beta}\\ &- \frac{1}{8}\phi[\chi_{\alpha\beta}, \chi^{\alpha\beta}] - \frac{i}{2}\lambda[\psi^\alpha, \psi_\alpha] - \frac{i}{2}\phi[\eta, \eta] - \frac{1}{8}[\phi, \lambda]^2\Big].\end{aligned} \tag{2.13}$$

Las observaciones siguientes (aunque no son estrictamente necesarias para la comprensión de estas notas) pueden ser útiles para quien esté familiarizado con teorías de calibración supersimétricas convencionales. La construcción anterior de un lagrangeano supersimétrico 4-dimensional, a partir de la versión no relativista, agregando campos y ajustando los acoplamientos, sin duda parece bastante ad hoc. Sin embargo, hay una forma sencilla de relacionar al lagrangeano resultante (2.13), a construcciones físicas estándar. [El argumento explicará la forma del lagrangeano (2.13), pero no explica por qué es supersimétrico sobre una 4-variedad arbitraria]. Considérese la habitual teoría de calibración supersimétrica para $N = 2$, en el espacio euclideano raso R^4. El grupo de rotación de R^4 es $SU(2)_L \times SU(2)_R$. El lagrangeano, $N = 2$, tiene una simetría interna global que denotaremos como $SU(2)_I \times U(1)_U$. Bajo $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_I \times U(1)_U$, para $N = 2$, los campos de una teoría YANG - MILLS supersimétrica, se transforman como sigue. Los campos de calibración son

$$(1/2,1/2,0)^0, \tag{2.14}$$

los bosones sin espín, son

$$(0, 0, 0)^2 \oplus (0,0, 0)^{-2}, \tag{2.15}$$

y los fermiones son

$$(1/2,0,1/2)^1 \oplus (0,1/2, 1/2)^{-1}. \tag{2.16}$$

[Aquí los tres números entre paréntesis denotan a las representaciones de $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_I$ y el superíndice, a la carga $U(1)$]. Supongamos ahora, que, permaneciendo en el espacio euclideano plano raso de cuatro dimensiones, consideramos una acción exótica, del grupo de rotaciones 4-dimensional, reemplazando $SU(2)_L \times SU(2)_R$ por $SU(2)_L \times SU(2)'_R$ donde $SU(2)'_R$ es la suma diagonal de $SU(2)_L$ y $SU(2)_R$. Es fácil ver que, con respecto a $SU(2)_L \times SU(2)'_R \times U(1)$, los bosones se transforman en

$$(1/2,\ 1/2)^0 \oplus (0,\ 0)^2 \oplus (0,\ 0)^{-2} \tag{2.17}$$

y los fermiones, en

$$(1/2,\ 1/2)^1 \oplus (0,\ 1)^{-1} \oplus (0,\ 0)^{-1}. \tag{2.18}$$

Estos son precisamente los campos que aparecen en (2.13). Los fermiones ψ_α, $\chi_{\alpha\beta}$ y η se transforman en $(1/2,\ 1/2)^1$, $(0,\ 1)^{-1}$ y $(0,\ 0)^{-1}$, respectivamente; mientras que los bosones A_α, ϕ y λ se transforman en $(1/2,\ 1/2)^0$, $(0,\ 0)^2$ y $(0,\ 0)^{-2}$. Mientras que la 4-variedad M sea el espacio euc1ideano raso, el lagrangeano (2.13) es simplemente el lagrangeano estándar para $\boldsymbol{N} = 2$, con una exótica acción del grupo de rotación.

Los supersimetrías globales del modelo estándar $N = 2$ se transforman bajo $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_I \times U(1)_U$ en $(1/2,\ 0,\ 1/2)^{-1} \oplus (0,\ 1/2,\ 1/2)^{+1}$. Así que se transforman bajo $SU(2)_L \oplus SU(2)_R$, en $(1/2,\ 1/2)^{-1\ 1} \oplus (0,\ 1)^1 \oplus (0,\ 0)^1$. La supercarga del singulete LORENTZ que hemos considerado es simplemente el componente $(0,\ 0)^1$.

Por tanto, desde este punto de vista, es obvio que (2.13) es supersimétrica si M es R^4 con métrica rasa. Es crucial y menos evidente que (2.13) es supersimétrica para M una 4-variedad Riemannana orientable arbitraria. En la verificación de la supersimetría, a veces, uno se encuentra con conmutadores de derivadas covariantes y puede aparecer el tensor RIEMANN. Sin embargo, en la verificación de supersimetría de (2.13), hay sólo un punto en el cual se encuentra el conmutador de derivadas covariantes. Éste es al comprobar $\delta(\mathrm{Tr}(D_\alpha\psi_\beta \cdot \chi^{\alpha\beta})) = \frac{1}{2}\varepsilon\mathrm{Tr}([D_\alpha,\ D_\beta]\phi \cdot \chi^{\alpha\beta})$. Puesto que el conmutador de derivadas covariantes, aquí, actúa sobre el campo de espín cero ϕ, el tensor RIEMANN no aparece y no hay problema. No sabemos si algunas versiones de teorías de campos supersimétricas $N \geq 2$, serán igualmente supersimétricas sobre una 4-variedad general.

2.2 Algunas Fórmulas Útiles

Concluimos esta sección con fórmulas que serán útiles en secciones posteriores de este trabajo. En primer lugar, tenemos la fórmula de la supersimetría actual que, según el teorema de NOETHER, genera la simetría fermiónica (2.8). La receta para encontrar la supersimetría actual, es estándar. Se considera una transformación de la forma (2.8) con ε un parámetro anticonmutativo que no necesariamente es constante. Puesto que la variación del lagrangeano sería cero si ε es constante, debe ser proporcional a la derivada de ε y, así, tiene la forma general

$$\delta\mathscr{L} = \int_M \partial_\alpha \varepsilon \cdot \boldsymbol{J}^\alpha \tag{2.19}$$

para algún $\boldsymbol{J}^\alpha$. En el caso que nos ocupa, se calcula

$$\boldsymbol{J}^\alpha = \mathrm{Tr}\Big[(F^{\alpha\beta} + \tilde{F}^{\alpha\beta})\psi_\beta - \eta D^\alpha\phi - D_\beta\phi \cdot \chi^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\psi^\alpha\,[\lambda, \phi]\Big]. \tag{2.20}$$

con

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}. \tag{2.21}$$

Ahora, la variación del lagrangeano (2.13) bajo (2.8) tiene la forma (2.19) sin tener en cuenta el comportamiento de los campos (A, ϕ, λ, η, ψ, χ). Sin embargo, si se satisfacen las ecuaciones de campo EULER-LAGRANGE, entonces $\mathscr{L}$ es estacionario bajo las variaciones (con soporte compacto) arbitrarias de los campos y, en particular, bajo (2.19). Por lo tanto, las ecuaciones EULER-LAGRANGE implican el desvanecimiento (2.19) para ε compactamente soportado, arbitrario; Esto significa que las ecuaciones EULER-LAGRANGE implican que

$$D_\alpha \boldsymbol{J}^\alpha = 0, \tag{2.22}$$

como se puede verificar directamente. Esto nos permite construir una carga conservada. Dado un tres ciclo de homología Y en M, la integral

$$Q_Y = \int_Y d\Sigma_\mu \boldsymbol{J}^\mu \tag{2.23}$$

(o equivalentemente $Q_Y = \int_Y *\boldsymbol{J}$, con $*\boldsymbol{J}$ la 3-forma cerrada dual a la actual $\boldsymbol{J}^\mu$) depende solamente de la clase de homología de Y.

Ahora, vamos a calcular el tensor energía-ímpetu de la teoría. Éste se define en términos de la variación del lagrangeano con respecto a un cambio en el tensor métrica $g_{\alpha\beta}$ de M. La definición de $T_{\alpha\beta}$ es que bajo un cambio infinitesimal de la métrica $g^{\alpha\beta} \to g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}$, la acción varía por

$$\delta\mathscr{L} = \frac{1}{2}\int_M \sqrt{g}\;\delta g^{\alpha\beta}\,T_{\alpha\beta}. \tag{2.24}$$

Aquí hay una sutileza que debe tenerse en cuenta. El tensor antisimétrico $\chi_{\alpha\beta}$ está sujeto a una restricción de auto-dualidad

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,g^{\gamma\gamma'}g^{\delta\delta'}\chi_{\gamma'\delta'} \tag{2.25}$$

que debe preservarse al determinar la variación del lagrangeano respecto a $g^{\alpha\beta}$. Para preservar esta condición, un cambio arbitrario $\delta g^{\alpha\beta}$ en la métrica, debe ir acompañado por

$$\delta\chi_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\delta g^{\gamma\gamma'} g^{\delta\delta'}\chi_{\gamma'\delta'} - \tfrac{1}{8}(\delta g^{\sigma\tau} g_{\sigma\tau})\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\delta g^{\gamma\gamma'} g^{\delta\delta'}\chi_{\gamma'\delta'}\,. \tag{2.26}$$

Entonces es sencillo, aunque un poco tedioso, determinar el tensor energía-ímpetu. Se encuentra

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} = \mathrm{Tr}\Big[&\big(F_{\alpha\sigma}F^{\sigma}_{\beta} - g_{\alpha\beta}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}\big) + \tfrac{i}{2}\big([D_{\alpha}\psi_{\sigma} - D_{\sigma}\psi_{\alpha}]\chi^{\sigma}_{\beta} + [D_{\beta}\psi_{\sigma} - D_{\sigma}\psi_{\beta}]\chi^{\sigma}_{\alpha} \\ &- \tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}[D_{\lambda}\psi_{\sigma} - D_{\sigma}\psi_{\lambda}]\chi^{\sigma}_{\alpha}\big) - \tfrac{1}{2}\big(D_{\alpha}\phi D_{\beta}\lambda + D_{\beta}\phi D_{\alpha}\lambda - g_{\alpha\beta}D_{\sigma}\phi D^{\sigma}\lambda\big) \\ &- i\big(D_{\alpha}\eta\,\psi_{\beta} + D_{\beta}\eta\,\psi_{\alpha} - g_{\alpha\beta}D_{\sigma}\eta\,\psi^{\sigma}\big) - 2i\big(\lambda\,\psi_{\alpha}\psi_{\beta} - \tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}\lambda\,\psi_{\sigma}\psi^{\sigma}\big) \\ &+ \tfrac{i}{2}g_{\alpha\beta}\phi[\eta,\eta] + \tfrac{1}{8}g_{\alpha\beta}[\phi,\lambda]^{2}\Big]. \end{aligned} \tag{2.27}$$

La característica más importante de $T_{\alpha\beta}$ es, por supuesto, que es conservada (en el sentido covariante) si se cumplen las ecuaciones de movimiento

$$D_{\alpha}T_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.28}$$

La ecuación (2.28) se obtiene mediante un argumento formal, semejante al que lleva a (2.22). Bajo una transformación de coordenadas $\delta x^{\alpha} = u^{\alpha}$, con x^{α}: coordenadas sobre M y u^{α}: un campo vectorial infinitesimal, la métrica varía según $\delta g_{\alpha\beta} = -(D^{\alpha}u^{\beta} + D^{\beta}u^{\alpha})$. Esta transformación de coordenadas induce algunos cambios en $(A, \phi, \lambda, \eta, \psi, \chi)$. Si son válidas las ecuaciones EULER-LAGRANGE, la acción será invariante hasta orden más bajo. El cambio de la acción es en realidad $\delta\mathscr{L} = \frac{1}{2}\int\sqrt{g}\,\delta g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\int\sqrt{g}\,(D^{\alpha}u^{\beta} + D^{\beta}u^{\alpha})T_{\alpha\beta}$. Este se desvanece para u^{α}arbitrario compactamente soportado, si, y sólo si, se cumple (2.28).

Ahora vamos a hablar de invariancias con respecto a escala y conformales. Para la traza del tensor energía-ímpetu, se encuentra que

$$g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = \mathrm{Tr}\big(D_{\sigma}\phi\cdot D^{\sigma}\lambda - 2iD_{\sigma}\eta\cdot\psi^{\sigma} + 2i\lambda[\psi_{\sigma},\psi^{\sigma}] + 2i\phi[\eta,\eta] + \tfrac{1}{2}[\phi,\lambda]^{2}\big) \tag{2.29}$$

Esta no se anula; por tanto, el lagrangeano (2.13) no es conformalmente invariante –no es invariante con respecto a $\delta g^{\alpha\beta} = w(x)g^{\alpha\beta}$ con $w(x)$ una función real arbitraria sobre M. Sin embargo, la traza del tensor energía-momento se puede escribir (usando las ecuaciones de movimiento) como una divergencia total

$$g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = D_{\alpha}R^{\alpha}, \tag{2.30}$$

con

$$R^{\alpha} = \mathrm{Tr}(\lambda D^{\alpha}\phi - 2i\eta\psi^{\alpha}). \tag{2.31}$$

El hecho de que la traza del tensor tensión sea una divergencia total, significa que el lagrangeano es invariante bajo un reescalado global de la métrica; es decir, si $\delta g^{\alpha\beta} = wg^{\alpha\beta}$, con w constante, entonces $\delta\mathscr{L} = \frac{1}{2}\int_M \sqrt{g}\,\delta g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = \frac{w}{2}\int_M \sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = \frac{w}{2}\int_M \sqrt{g}\,D_{\alpha}R^{\alpha} = 0$. La siguiente declaración está estrechamente relacionada. Sea M R^4 con la métrica rasa habitual y coordenadas euclideanas x^{α}. Entonces la transformación de escalamiento $\delta x^{\alpha} = wx^{\alpha}$ del espacio euclidiano (w un parámetro infinitesimal) es generado por la corriente conservada

$$S^{\alpha} = T^{\alpha\beta}x_{\beta} - R^{\alpha} \tag{2.32}$$

La conservación de S^{α} se deduce inmediatamente de (2,30). S^{α} genera la invariancia por escala de (2.13), que es visible a simple vista, con dimensiones de escalamiento (1, 0, 2, 2, 1, 2) para (A, ϕ, λ, η, ψ, χ).[7]

Ahora llegamos a un punto que –como veremos en la siguiente sección– es de suma importancia en la comprensión de la teoría DONALDSON. Un operador que puede escribirse como $\{Q, \mathcal{O}\}$ para algún $\mathcal{O}$, es conocido en la teoría de cuerdas como un "conmutador BRST". [El operador $\{Q, \}$, fue introducido en (2.11)]. Las funciones de correlación de conmutadores BRST, están sujetas a poderosas restricciones [17], que analizaremos en Sec. 3. Al estudiar la teoría DONALDSON, resultará que uno de los hechos más importantes es que el tensor energía-momento es un conmutador BRST. Se encuentra

$$T_{\alpha\beta} = \{Q, \lambda_{\alpha\beta}\}, \tag{2.33}$$

con

$$\lambda_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(F_{\alpha\sigma}\chi_{\beta}^{\sigma} + F_{\beta\sigma}\chi_{\alpha}^{\sigma} - \tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}\big) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(\psi_{\alpha}D_{\beta}\lambda + \psi_{\beta}D_{\alpha}\lambda - g_{\alpha\beta}\psi_{\sigma}D^{\sigma}\lambda\big)$$
$$+ \tfrac{1}{4}g_{\alpha\beta}\mathrm{Tr}\big(\eta[\phi, \lambda]\big). \tag{2.34}$$

Uno podría creer, por (2.28) y (2,33) que $D_{\alpha}\lambda^{\alpha\beta}$ se desvanecería. Más bien, se encuentra

---

[7] Téngase en cuenta, en particular, que (2.13) es un contraejemplo a algunas declaraciones erróneas frecuentes, de la relación entre invariancia por escala y conformal. Para una aclaración sobre estas cuestiones ver [24].

$$D_\alpha\left(\lambda^{\alpha\beta} + U^{\alpha\beta}\right) = 0, \tag{2.35}$$

con $U^{\alpha\beta} = -\,U^{\alpha\beta}$ un tensor antisimétrico definido por

$$U^{\alpha\beta} = \mathrm{Tr}\left([F^{\alpha\beta} + \tilde{F}^{\alpha\beta}]\eta\right) + \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{Tr}\,\psi_\gamma D_\delta\lambda + \tfrac{1}{4}\mathrm{Tr}\left([\phi, \lambda]\chi^{\alpha\beta}\right). \tag{2.36}$$

Por ecuaciones (2.28), (2.35) y (2.36) se tiene que

$$0 = D_\alpha T^{\alpha\beta} = D_\alpha(\{Q, \lambda^{\alpha\beta}\}) = \{Q, D_\alpha\lambda^{\alpha\beta}\} = -\,\{Q, D_\alpha U^{\alpha\beta}\} = -\,D_\alpha(\{Q, U^{\alpha\beta}\}) \tag{2.37}$$

Así $\{Q, U^{\alpha\beta}\}$ debe ser conservada, aunque $U^{\alpha\beta}$no. Es fácil comprobar esto; en efecto,

$$\{Q, \lambda^{\alpha\beta}\} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}D_\gamma R_\delta \tag{2.38}$$

con R_δ definida en (2.31). [No sabemos por qué precisamente, el mismo objeto R_δ aparece tanto en (2.30) como en (2.38).] De (2.38) se desprende que $D_\alpha(\{Q, U^{\alpha\beta}\}) = 0$, como se esperaba.

Como preparación para la siguiente sección, requeriremos una fórmula más, de naturaleza similar. Sea

$$V = \tfrac{1}{4}\mathrm{Tr}F_{\alpha\beta}\,\chi^{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\psi_\alpha D^\alpha\lambda - \tfrac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(\eta[\phi, \lambda]\right). \tag{2.39}$$

Entonces se comprueba (con la ayuda de la ecuación de movimiento χ) que

$$\{Q, V\} = \mathscr{L}', \tag{2.40}$$

donde

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L} + \tfrac{1}{4}\int_M \sqrt{g}\,\mathrm{Tr}F_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}. \tag{2.41}$$

Aquí $\mathscr{L}$ es el lagrangeano de ec. (2.13) y el segundo término (que equivale a $\tfrac{1}{8}\int_M \sqrt{g}\,\mathrm{Tr}F \wedge F$) es una invariante topológica, que mide a la primera clase PONTRYAGIN del fibrado vectorial sobre el que A_α es una conexión y $F_{\alpha\beta}$ un tensor curvatura. Agregar esta invariante topológica al lagrangeano no perturbaría cualquiera de nuestras consideraciones anteriores, puesto que el nuevo término, siendo una invariante topológica, es ciertamente invariante bajo todas las transformaciones infinitesimales que hemos considerado anteriormente. En virtud de ec. (2,40), $\mathscr{L}'$ es en muchos aspectos una opción más conveniente de lagrangeano que $\mathscr{L}$, como veremos en la siguiente sección.

Antes de abordar la teoría quántica (y los polinomios DONALDSON), cabe señalar algunos puntos. La parte bosónica del lagrangeano contiene la acción YANG-MILLS y ciertos acoplamientos escalares. Aunque la acción YANG-MILLS es definida positiva, la energía cinética (ϕ, λ) es indefinida, así que el término $\mathrm{Tr}[\phi, \lambda]^2$, en (2.13), tiene el signo equivocado. Estos hechos podrían hacer parecer problemático al formalismo FEYNMAN de integral de línea, que utilizaremos en la siguiente sección. Hay varios puntos de vista que se podrían adoptar.

Un punto de vista es volver a la forma (2.7) de la mecánica lagrangeana, quizás con la incorporación del término carga topológica [recordemos que (2.7) y (2.13) son equivalentes, diferenciándose sólo por un conmutador BRST. Hemos introducido (2.13) sólo por su más obvia relación para la supersimetría $N = 2$ y la superior simetría que tiene cuando $M = Y \times R^1$; ver Sec. 2.4]. En esta versión, los escalares sólo aparecen cuadráticamente; pueden ser integrados por integración gaussiana y la indefinición de la energía cinética, no perjudica.

Otro posible punto de vista es que en lugar de considerar a ϕ y λ como campos reales independientes, se puede ver a λ como un campo complejo y poner a $\phi = -\lambda^*$. Entonces los términos (ϕ, λ) en (2.13), vienen a ser definidos positivos. Esto es lo que uno obtendría si se tomara literalmente a la supersimetría alabeada $N = 2$. Todas las fórmulas dadas arriba, todavía entran mediante este punto de vista.[8] El inconveniente de este enfoque es que si λ es complejo y $\phi = -\lambda^*$, el lagrangeano no es real y no es obvio que las invariantes DONALDSON resulten ser números reales.

Es bien sabido que, en teoría FLOER y DONALDSON, las conexiones reducibles (es decir, los campos de calibración que son invariantes bajo un subgrupo no trivial del grupo de calibración) causan muchas dificultades. En el marco actual, estos problemas aparecen en modos cero del sistema (ϕ, λ) de conexiones reducibles. [En otras palabras, para las conexiones reducibles, el laplaceano $-D_\alpha D^\alpha$, que es el operador cinético para el sistema (ϕ, λ) en la aproximación linealizada, tiene un núcleo no trivial]. El tratamiento adecuado del sistema (ϕ, λ), que aún no está claro, está obligado a interactuar de una manera no trivial con el tratamiento adecuado de las conexiones reducibles en teoría FLOER y DONALDSON.

3 REPRESENTACIÓN DE LOS POLINOMIOS DONALDSON, MEDIANTE INTEGRALES DE LÍNEA

En la última sección, se formuló una versión de la teoría YANG-MILLS supersimétrica que posee algunas simetrías fermiónicas sobre una 4-variedad orientable tersa M arbitraria. Esto permite utilizar técnicas de teoría quántica de campos para

[8] No es necesario preocuparse de que la variación (2.8) sea compatible con $\phi = -\lambda^*$. La súpercorriente (2.20) se conserva todavía, en virtud de las ecuaciones de movimiento si λ es complejo y $\phi = -\lambda^*$ y esto es lo que cuenta.

describir invariantes de las 4-variedades. Como veremos, surgirá una descripción natural de las invariantes.

En esta sección, vamos a ver lo que puede obtenerse por manipulaciones formales de integrales FEYNMAN de línea. Por supuesto, un marco riguroso para la teoría quántica de calibración 4-dimensional, todavía no se ha desarrollado a un grado suficiente para justificar todas nuestras consideraciones. Tal vez la conexión que se descubrirá entre teoría quántica de campos y teoría DONALDSON, pueda servir para ampliar el interés en la teoría de campos constructiva o, incluso, estimular el desarrollo de nuevos enfoques para ese tema. Aunque nuestras consideraciones en esta sección y la siguiente serán puramente formales, vamos a ver en Sec. 2.5 que incluso, sin tener una construcción rigurosa de la teoría quántica de campos, se pueden extraer fórmulas concretas y rigurosas, que son relevantes para la teoría DONALDSON, junto con una receta para probar algunas de las principales características de esas fórmulas.

Procediendo formalmente, encontraremos representaciones, por integrales de línea, de ciertas invariantes topológicas.[9] Las integrales contempladas serán integrales sobre todos los campos $(A, \phi, \lambda, \eta, \psi, \chi)$ considerados en Sec. 2. La medida de integración $\mathscr{D}A \cdot \mathscr{D}\phi \cdot \mathscr{D}\lambda \cdot \mathscr{D}\eta \cdot \mathscr{D}\psi \cdot \mathscr{D}\chi$ se abreviará como $(\mathscr{D}X)$.[10] Las integrales que consideramos serán de la forma

$$Z(W) = \int (\mathscr{D}X) \exp(-\mathscr{L}'/e^2) \cdot W, \tag{3.1}$$

donde $\mathscr{L}'$ es el lagrangeano de la ecuación (2.41) (con un término topológico incluido), e es un número real generalmente conocido como "constante de acoplamiento de calibración", y W generalmente será un polinomio en las variables de integración. La integral de (3.1) es conocida como el valor esperado (sin normalizar) de W y se denota por $\langle W \rangle$.

Recuérdese, de Sec. 2, que la variación de cualquier campo $\mathcal{O}$ (por un "campo" nos referimos simplemente a un funcional de las variables de integración A, ϕ, λ, η, ψ, χ) bajo la transformación fermiónica (2.8) se denota como $\{Q, \mathcal{O}\}$. La característica más importante de la integración FEYNMAN de línea en la teoría super-

[9] Lo que vagamente llamamos invariantes topológicas son realmente "invariantes tersas", es decir, dependen de la tersura de la estructura pero no de la métrica de M.

[10] Como es habitual en teorías de calibración, realmente, aquí pretendemos una integración sobre las órbitas del grupo de calibración —es decir, sobre campos modulo transformaciones de calibración.

simétrica bajo discusión aquí, es $\langle\{Q, \mathcal{O}\}\rangle = 0$ para cualquier $\mathcal{O}$. Esto es así, por el siguiente motivo. Puesto que la medida de integración $(\mathscr{D}X)$ es invariante bajo supersimetría, la integral.

$$Z_\varepsilon(\mathcal{O}) = \int (\mathscr{D}X) \exp(\varepsilon Q) \cdot \{\exp(-\mathscr{L}'/e^2) \cdot \mathcal{O}\} \tag{3.2}$$

es independiente del parámetro infinitesimal ε. Expandiendo a ésta y usando el hecho de que la acción es supersimétrica ($\{Q, \mathscr{L}\} = 0$), vemos que

$$Z_\varepsilon(\mathcal{O}) = \int (\mathscr{D}X) \exp(\varepsilon Q) \exp(-\mathscr{L}'/e^2)(\mathcal{O} + \varepsilon\{Q, \mathcal{O}\}). \tag{3.3}$$

Por lo tanto, la afirmación de que $Z_\varepsilon(\mathcal{O})$es independiente de ε; significa que

$$0 = \langle\{Q, \mathcal{O}\}\rangle = \int (\mathscr{D}X) \exp(\varepsilon Q) \exp(-\mathscr{L}'/e^2) \cdot \{Q, \mathcal{O}\}. \tag{3.4}$$

Un corolario que quizás debería indicarse explícitamente es el siguiente.

Si $\{Q, A\} = 0$, entonces $\langle A\{Q, B\}\rangle = 0$ para cualquier B, ya que $\{Q, A\} = 0$ implica $A\{Q, B\} = \{Q, AB\}$; así que

$$\langle A\{Q, B\}\rangle = \langle\{Q, AB\}\rangle = 0. \tag{3.5}$$

Ahora estamos listos para definir invariantes topológicas. Escogemos una 4-variedad tersa M, un grupo de calibración compacto G y un fibrado E de G en el cual el campo de calibración $A_\alpha^{\ a}$ es una conexión. Nuestra más simple invariante topológica es la función de partición:

$$Z = \int (\mathscr{D}X) \exp(-\mathscr{L}'/e^2). \tag{3.6}$$

¿Por qué es Z una invariante topológica? Para definir el lagrangeano $\mathscr{L}'$, uno tiene que escoger una métrica riemannana $g_{\alpha\beta}$en M. Para demostrar que (3.6) es una invariante topológica, es necesario y suficiente demostrar que Z es invariante bajo un cambio infinitesimal en la métrica. Recordemos de Sec. 2, que el cambio de $\mathscr{L}'$ con respecto a un cambio de g es por definición el tensor energía-ímpetu:

$$\delta\mathscr{L}' = \frac{1}{2}\int_M \sqrt{g}\, \delta g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}. \tag{3.7}$$

Recuérdese también, que el tensor energía- ímpetu es un conmutador BRST:

$$T_{\alpha\beta} = \{Q, \lambda_{\alpha\beta}\}, \tag{3.8}$$

con $\lambda_{\alpha\beta}$ definido en la ecuación (2.34). Por lo tanto, el cambio en Z, con respecto un cambio en la métrica, es

$$Z = \int (\mathscr{D}X)(\exp[-\mathscr{L}'/e^2])\left(-\frac{\delta\mathscr{L}'}{e^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{e^2}\int(\mathscr{D}X)(\exp[-\mathscr{L}'/e^2]) \cdot \left\{ Q,\ \int_M \sqrt{g}\ \delta g^{\alpha\beta}\lambda_{\alpha\beta} \right\}$$

$$= -\frac{1}{e^2}\left\langle \left\{ Q,\ \int_M \sqrt{g}\ \delta g^{\alpha\beta}\lambda_{\alpha\beta} \right\} \right\rangle = 0. \tag{3.9}$$

Esto demuestra que Z es una invariante topológica.[11]

Antes de intentar evaluar esta invariante, observemos que es por razones similares independiente del acoplamiento de calibración e. De hecho, la variación de Z con respecto a e^2, es

$$\delta Z = \delta\int(\mathscr{D}X)(\exp[-\mathscr{L}'/e^2]) = \delta\Big(-\frac{1}{e^2}\Big)\int(\mathscr{D}X)\ \exp-(\mathscr{L}'/e^2)\cdot\mathscr{L}'$$

$$= \delta\Big(-\frac{1}{e^2}\Big)\int\mathscr{D}X\ \exp-(\mathscr{L}'/e^2)\cdot\ \left\{Q, V\right\} = \delta\Big(-\frac{1}{e^2}\Big)\left\langle\left\{Q, V\right\}\right\rangle = 0, \tag{3.10}$$

donde estamos tomando de ec. (2.40), el hecho de que $\mathscr{L}' = \{Q, V\}$. Esto muestra que Z es independiente de e^2, en tanto $e^2 \neq 0$.[12]

Por lo tanto, podemos evaluar Z tomando el límite de e^2 muy pequeño, con lo cual la integral de línea está dominada por los mínimos clásicos. Para encontrar estos mínimos, nótese que los términos de campos de calibración en $\mathscr{L}'$, son

$$\mathscr{L}_A' = \frac{1}{4}\int_M \sqrt{g}\ \mathrm{Tr}(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta})$$
$$= \frac{1}{8}\int_M \sqrt{g}\ \mathrm{Tr}(F_{\alpha\beta} + \tilde{F}_{\alpha\beta})(F^{\alpha\beta} + \tilde{F}^{\alpha\beta}). \tag{3.11}$$

Esta es semidefinida positiva y se anula si y sólo si

---

[11] Ignoramos en (45) una posible dependencia de la medida $(\mathscr{D}X)$ de la métrica g. Tener en cuenta esta dependencia es realmente el problema de demostrar que la ecuación fundamental $T_{\alpha\beta} = \{Q, \lambda_{\alpha\beta}\}$, es válida mecánico-quánticamente. Hacer esto rigurosamente, es una de las tareas de la teoría quántica constructiva. En este trabajo nos limitaremos a consideraciones esencialmente clásicas.

[12] Un intento de ir a $e^2 = 0$, escribiendo al factor $\exp-(\mathscr{L}'/e^2)$ como un conmutador BRST, falla por dos razones. Primero, sin el factor de convergencia $\exp-(\mathscr{L}'/e^2)$, la integración por partes en el espacio de funciones utilizada para probar que $\langle\{Q, \mathcal{O}\}\rangle = 0$ para cada $\mathcal{O}$, podría no ser válida. Segundo, la verificación de que $\mathscr{L}' = \{Q, V\}$ utiliza la ecuación de movimiento de χ y esto se puede justificar en las funciones de correlación, sólo con el uso del factor $\exp-(\mathscr{L}'/e^2)$.

$$F_{\alpha\beta} = -\tilde{F}_{\alpha\beta}, \tag{3.12}$$

esto es, si, y sólo, si el campo de calibración es anti-auto-dual. Por lo tanto, la evaluación de Z depende de la expansión alrededor de soluciones de (3.12), conocidas como instantones. (Sería tedioso llamarlos anti-instantons; las soluciones de la ecuación opuesta $F_{\alpha\beta} = +\tilde{F}_{\alpha\beta}$, no se considerarán en esta sección).

Por lo tanto, hagamos algunas observaciones sobre instantones. Dependiendo de la elección de la variedad M y el fibrado E, pueden o no, existir instantones. Si existen, entonces (para una elección genérica de la métrica g) los instantones tienen un espacio de módulos $\mathscr{M}$ (terso excepto por algunas singularidades relativamente manejables) cuya dimensión "formal" viene dada por una cierta fórmula topológica [13,2].[13] Si el grupo de calibración G es $SU(2)$, esta fórmula es

$$d(\mathscr{M}) = 8p_1(E) - \frac{3}{2}[\chi(M) + \sigma(M)] \tag{3.13}$$

donde p_1(E) es el primer número PONTRYAGIN del fibrado E y $\chi(M)$ y $\sigma(M)$ son la característica EULER y la signatura de M.

Si logramos encontrar un campo de calibración de instantones, podemos buscar un instanton cercano $A + \delta A$ que, para satisfacer (3.12), debe cumplir la condición

$$0 = D_\alpha \delta A_\beta - D_\beta \delta A_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} D^\gamma \delta A^\delta \tag{3.14}$$

Además, estamos interesados en requerir que δA sea ortogonal a las variaciones en A, que pueden obtenerse puramente por una transformación de calibración. Esto se logra convenientemente, mediante la imposición de la condición de calibración

$$0 = D_\alpha \delta A^\alpha \tag{3.15}$$

Sea n el número de soluciones de (3.14), (3.15). Estas soluciones describen módulos de instantones infinitesimales, así que en un punto genérico en el espacio de módulos, $n = d(\mathscr{M})$ (por lo menos si las condiciones son tales que la dimensión formal es igual a la dimensión real).

Ahora echemos un vistazo a los modos cero del fermión en el campo instantonal. La ecuación de χ da

$$D_\alpha \psi_\beta - D_\beta \psi_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} D^\gamma \psi^\delta = 0, \tag{3.16}$$

mientras que la ecuación de η da

$$D_\alpha \psi^\alpha = 0. \tag{3.17}$$

[13] La dimensión formal es igual a la dimensión real bajo ciertas condiciones dadas más adelante.

Estas son las ecuaciones que acabamos de ver, así que el número de modos cero de ψ es el número que hemos denotado n. (esta relación entre las ecuaciones del fermión y el problema de módulos del instanton fue la motivación para presentar precisamente, esta colección de fermiones en Sec. 2).

Para un instanton genérico de $SU(2)$, no existen modos cero (η, χ). Esto es así, precisamente, cuando $n = d(\mathscr{M})$. La declaración general, regida por un teorema del índice, es que el número de modos cero de ψ, menos el número de modos cero de (η, χ) es igual a $d(\mathscr{M})$.

Recordemos que el lagrangeano (2.13) tiene una simetría global U a nivel clásico. ψ tiene $U = +\,1$ y η, χ tienen $U = -1$. Al igual que en [10], el número de modos cero de ψ menos el número de modos cero de η, χ es la violación neta de U por el instanton al nivel quántico; vamos a llamar a este número ΔU. Así

$$\Delta U = d(\mathscr{M}). \tag{3.18}$$

(El significado de esta afirmación es que la medida de integración $\mathscr{D}X$ no es invariante bajo U, pero se transforma con un peso definido $-\,\Delta U$). Ecuación (3.18) se cumple para cualquier grupo de calibración G; por supuesto, $d(\mathscr{M})$ debe determinarse usando la generalización apropiada de (3.13). Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que la $d(\mathscr{M})$ apropiada es la dimensión "formal" del espacio de módulos del instanton, que es igual a la dimensión real sólo si G y E son tales que el instanton genérico no es invariante bajo ningún subgrupo de G; Si G es más grande que $SU(2)$, esto sólo es posible bajo ciertas restricciones sobre E.

Volvamos ahora, a nuestro problema de determinar Z. Z se anula, a menos que M, G y E sean tales que $d(\mathscr{M}) = 0$. De lo contrario, $\Delta U \neq 0$ y la función de partición se anula por los modos cero del fermión.

Para simplificar aún más, la discusión, supondremos que además de que la dimensión formal $d(\mathscr{M})$ del espacio de módulos del instanton, se anula, la dimensión real también desaparece. De hecho, asumimos que el espacio de módulos consiste en instantones aislados, discretos. (Sin embargo, podrían utilizarse métodos típicos de teoría quántica de campos, para lidiar con una situación más general). En la expansión de un instanton aislado, es suficiente en el límite de acoplamiento débil, mantener solamente términos cuadráticos en los campos BOSE $\Phi = (A, \phi, \lambda)$ y campos FERMI $\Psi = (\eta, \psi, \chi)$. (El límite de acoplamiento débil es adecuado porque, como hemos visto, Z es independiente de acoplamiento).

Los términos cuadráticos son de la forma general,

$$\mathscr{L}_{(2)}= \int_M \sqrt{g}\ (\Phi \Delta_B \Phi + i\,\Psi D_F\, \Psi), \tag{3.19}$$

donde Δ_B y D_F son ciertos operadores de primer y segundo orden, respectivamente.[14] D_F es un operador real, anti-simétrico. La integral gaussana sobre Δ_B y D_F, da

$$\frac{\mathrm{Pfaff}(D_F)}{\sqrt{\det(\Delta_B)}} \tag{3.20}$$

Aquí Pfaff denota al Pfaffano del operador real, antisimétrico D_F (recordemos que, salvo el signo, el Pfaffano es igual a la raíz cuadrada del determinante).

Lo importante ahora, es que D_F y Δ_B están relacionados por la supersimetría. Una mirada a ec. (2.8) muestra que una clásica configuración de campo en la cual $F_{\alpha\beta} + \tilde{F}_{\alpha\beta} = 0$ y ϕ, λ, η, ψ, χ se anulan es invariante bajo la supersimetría (el requisito $F_{\alpha\beta} + \tilde{F}_{\alpha\beta} = 0$ es necesario para asegurar $\delta\chi_{\alpha\beta} = 0$). Por lo tanto, la supersimetría relaciona a las excitaciones fermiónicas y bosónicas sobre tales configuraciones de campos. Para ser precisos, para cada valor propio de D_F

$$iD_F\, \Psi = \lambda\, \Psi \tag{3.21 }$$

con $\lambda \neq 0$, existe un valor propio correspondiente de Δ_B,

$$\Delta_B \Phi = \lambda^2 \Phi \tag{3.22}$$

(Más exactamente, como D_F es un operador antisimétrico, sus valores propios ocurren en pares conjugados complejos. Cada uno de tales pares corresponde a un valor propio de Δ_B). Por lo menos para $M = S^4$, esta relación entre autovalores bosónicos y fermiónicos es un resultado estándar en la teoría de instantones [25]. Para la teoría supersimétrica particular que estamos considerando, el argumento pasa por M general de la misma manera (ya que hemos organizado para que la supersimetría se mantenga para M general).

Así, la razón de determinantes en (3.20) es formalmente

[14] Δ_B es un operador elíptico que actúa en las direcciones del espacio de campos transversal a las órbitas de calibración.

$$\frac{\mathrm{Pfaff}\, D_F}{\sqrt{\det(\Delta_B)}} = \pm \prod_i \frac{\lambda_i}{\sqrt{|\lambda_i|^2}}\,, \tag{3.23}$$

con el producto variando sobre todos los autovalores no nulos de Δ_B (o, equivalentemente, sobre todos los pares de valores propios distintos de cero de D_F). La razón para el signo incierto, a la derecha de (3.23), es que, aunque, salvo el signo, el Pfaffano es la raíz cuadrada del determinante, el signo depende de una elección de la orientación, que ahora debemos analizar.

De hecho, para cualquier campo de calibración A, no hay manera natural para determinar el signo de Pfaff D_F, puesto que no hay ninguna manera natural para buscar una orientación (o equivalentemente, para fijar el signo de la medida del fermión). También se puede elegir un particular campo de calibración $A = A_0$ y declarar Pfaff $D_F(A = A_0) > 0$. Una vez hecho esto, hay una forma natural para determinar el signo de Pfaff $D_F(A = A')$ para cualquier otro campo de calibración A' (siendo A_0 y A' conexiones sobre el mismo fibrado). Simplemente se interpola desde A_0 hasta A', via (digamos) la familia monoparamétrica de campos de calibración $A_t = tA_0 + (1-t)A'$, $0 \leq t \leq 1$ y se requiere que el signo de Pfaff $D_F(A_t)$ cambia cada vez que D_F tenga un valor propio cero para $A = A_t$. Esto determina unívocamente al signo de Pfaff $D_F(A)$; pero, todavía cabe preguntarse si la asignación es consistente —si el signo que se obtenga de esta manera depende de la elección de una interpolación desde A_0 hasta A'. Es equivalente a preguntar si Pfaff D_F cambiará de signo cuando es seguido continuamente alrededor de un lazo no contráctil, en el espacio $\mathscr{A}/\mathscr{G}$ de los campos de calibración modulo transformaciones de calibración. Físicamente, esta es la cuestión de si la teoría que estamos tratando de discutir, tiene una anomalía global, en el sentido de [26]. Si es así, la teoría bajo investigación, es inconsistente, en el sentido habitual de la teoría quántica de campos y no se puede esperar aprender algo interesante al estudiarla.

A priori, el Pfaffano de D_F debe ser considerado no como una función de $\mathscr{A}/\mathscr{G}$, sino como una sección de un cierto fibrado λ, de líneas reales, que podemos llamar el fibrado de líneas del Pfaffano. La cuestión es si el fibrado de líneas del Pfaffano es trivial (orientable). Precisamente esta cuestión ha surgido en el trabajo de DONALDSON. Para DONALDSON, era importante saber si el espacio $\mathscr{M}$ de módulos del instanton es orientable. Si denotamos a la mayor potencia exterior del fibrado tangente de $\mathscr{M}$ como ε, entonces, para DONALDSON, la cuestión era si el fibrado de líneas reales ε es orientable. Las dos cuestiones están relacionadas ya que, considerando a $\mathscr{M}$ como un subespacio de $\mathscr{A}/\mathscr{G}$, la restricción de λ a $\mathscr{M}$ es canónicamente isomorfa a ε, por lo menos si las condiciones son tales que las dimensiones formal y real de $\mathscr{M}$ son iguales. (Esto es así porque el núcleo de D_F corresponde, bajo tales condiciones, al espacio tangente del espacio de módulos). DONALDSON, realmente, demostró la orientabilidad de $\mathscr{M}$, usando teoría de índices y ciertos argumentos topológicos para demostrar que λ siempre es orientable y, así, sus resultados muestran que no existe una anomalía global que evite una determinación consistente del signo de Pfaff D_F.

En nuestro problema, simplemente elegimos un instanton y declaramos que (3.23) es + 1 para este instanton. Una vez hecho esto, hay una forma bien definida de evaluar (3.23) para cualquier otro instanton; para el i-ésimo instanton se iguala $(-1)^{n_i}$, donde $n_i = 0$ ó 1 según el resultado del proceso esbozado anteriormente. Ya que la contribución del i-ésimo instanton a Z, es $(-1)^{n_i}$, se tiene finalmente

$$Z = \sum_i (-1)^{n_i}. \tag{3.24}$$

Esta es una fórmula familiar, presentada originalmente por DONALDSON (quien motivó la definición de n_i de una manera ligeramente diferente, pero equivalente). DONALDSON se basó en argumentos topológicos para demostrar que si M, G y E son tales que $d(\mathscr{M}) = 0$, entonces el lado derecho de (3.24) es una invariante topológica. Hemos argumentado a la misma conclusión mediante la ecuación $T_{\alpha\beta} = \{Q, \lambda_{\alpha\beta}\}$, para probar que Z es una invariante topológica y luego evaluar Z para llegar a (3.24).

Ecuación (3.24) es sólo la primera de las invariantes DONALDSON. Más generalmente, cuando $d(\mathscr{M}) > 0$, DONALDSON define ciertas análogas, más sutiles, de (3.24), que han tenido implicaciones algo dramáticas, para el estudio de las 4-variedades tersas. Nos gustaría traer a éstas en el marco de la teoría quántica de campos.

Cuando $d(\mathscr{M}) > 0$, las integrales de línea que no se anulan serán de la forma

$$Z(\mathcal{O}) = \int (\mathscr{D}X) \exp(-\mathscr{L}'/e^2) \cdot \mathcal{O}, \tag{3.25}$$

donde $\mathcal{O}$ debe llevar un número quántico U igual a $d(\mathscr{M})$, con el fin de absorber los modos cero del fermión. Determinemos las condiciones sobre $\mathcal{O}$ para que (3.25) sea una invariante topológica.

La variación de (3.25) bajo un cambio en la métrica es

$$\delta Z(\mathcal{O}) = \delta\int(\mathscr{D}X)\exp[-\mathscr{L}'/e^2]\cdot(-[\mathscr{L}'/e^2]\cdot\mathcal{O} + \delta_g\mathcal{O})$$
$$= \delta\int(\mathscr{D}X)\, e^{-I}\cdot\Big(-\frac{1}{2e^2}\Big\{Q, \int\sqrt{g}\,\delta g^{\alpha\beta}\lambda_{\alpha\beta}\Big\}\cdot\mathcal{O} + \delta_g\mathcal{O}\Big), \quad (3.26)$$

donde $\delta_g\mathcal{O}$ es la variación de $\mathcal{O}$ con respecto a $g_{\alpha\beta}$ (si $g_{\alpha\beta}$ aparece explícitamente en la definición de $\mathcal{O}$) y $I = \mathscr{L}'/e^2$.

El primer término en el lado derecho de (3.26) se anula si $\{Q, \mathcal{O}\} = 0$, entonces

$$\int(\mathscr{D}X)\, e^{-I}\cdot\Big(-\frac{1}{2e^2}\Big\{Q, \int\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta}\lambda_{\alpha\beta}\Big\}\Big)\cdot\mathcal{O} = -\frac{1}{2e^2}\Big\langle\Big\{Q, \int\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta}\lambda_{\alpha\beta}\Big\}\Big\rangle\cdot\mathcal{O}$$
$$= 0. \quad (3.27)$$

[Nótese que estamos utilizando (3.5)]. El segundo término en (3.26) se anula si $\mathcal{O}$ no tiene ninguna dependencia explícita con respecto a $g_{\alpha\beta}$ ó, más generalmente, si $\delta\mathcal{O} = \{Q, \varrho\}$ para algún ϱ.

Si $\mathcal{O}$ satisface estas condiciones, entonces $Z(\mathcal{O})$ es una invariante topológica. Sin embargo, $Z(\mathcal{O})$ se anulará si $\mathcal{O} = \{Q, \varrho\}$ para algún ϱ, ya que entonces

$$Z(\mathcal{O}) = \langle\{Q, \varrho\}\rangle = 0. \quad (3.28)$$

Por tanto, las invariantes topológicas vendrán de los operadores $\mathcal{O}$ tales que $\{Q, \mathcal{O}\} = 0$, módulo los de la forma $\mathcal{O} = \{Q, \varrho\}$, con $\mathcal{O}$ satisfaciendo la condición adicional $\delta_g\mathcal{O} = \{Q, \varrho\}$ (donde $\delta_g\mathcal{O}$ es el cambio en $\mathcal{O}$, bajo un cambio en $g_{\alpha\beta}$). En nuestros ejemplos actuales, siempre tendremos $\delta_g\mathcal{O} = 0$.

Revisando a las variaciones de supersimetría en (2.8), es fácil encontrar operadores que satisfagan estos criterios. El campo ϕ, de espín cero, es invariante BRST, no depende explícitamente de la métrica y (siendo el único campo local de dimensión de escalamiento cero) no se puede escribir como $\{Q, \varrho\}$. Por supuesto, ϕ mismo no es invariante por calibración, pero polinomios invariantes en ϕ tales como $\mathrm{Tr}\,\phi^2$, $\mathrm{Tr}\,\phi^4$, etc., son invariantes por calibración; también satisfacen a nuestros otros criterios. El número de polinomios invariantes independientes es igual al rango de G; corresponden a los operadores CASIMIR independientes. Para $G = SU(2)$, sólo hay uno, que podemos tomar como

$$W_0 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\phi^2(P). \tag{3.29}$$

Aquí P es un punto en M; enfatizamos mediante la notación, que W_0 es un operador local que depende de la elección de un punto P. Nótese que W_0 tiene $U = 4$.

Ahora podemos definir algunas nuevas invariantes topológicas.

Sean la variedad M y el fibrado E tales que $d(\mathscr{M}) = 4k$. Escojamos k puntos P_1 ..., P_k en M y definamos

$$Z(k) = \int(\mathscr{D}X)\, e^{-I}\cdot \prod_{i=1}^{k} W_0\,(P_i) = \langle W_0(P_1)\ ...\ W_0(P_1)\rangle. \tag{3.30}$$

Entonces $Z(k)$ es independiente de la elección de métrica sobre M en virtud de la discusión anterior. También es independiente de la elección de puntos P_1, ..., P_k ya que la elección de los k puntos no tiene ninguna significación intrínseca independientemente de una elección de métrica.

Si bien, este argumento muestra que $Z(k)$ es una invariante topológica, es muy esclarecedor comprobar más explícitamente, que $Z(k)$ es independiente de la elección de los puntos P_1, ..., P_k. Para ello diferenciamos a $W_0(P)$ con respecto a las coordenadas x^α de P y encontramos

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}W_0 = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\phi^2\Big) = \mathrm{Tr}\phi\, D_\alpha = i\{Q, \mathrm{Tr}\phi\ \psi_\alpha\}. \tag{3.31}$$

Así, aunque W_0 no es un conmutador BRST, su derivada sí lo es. Se sigue de (3.31) que

$$W_0(P) - W_0(P') = \int_{P'}^{P} \frac{\partial W_0}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = i\{Q, \int_{P'}^{P} W_1\}, \tag{3.32}$$

donde W_1 es la 1-forma con valor de operador $W_1 = \mathrm{Tr}(\phi\ \psi_\alpha)\cdot dx^\alpha$. Así, vemos que

$$\Big\langle [W_0(P) - W_0(P')]\cdot \prod_j W_0(P_j)\Big\rangle = \Big\langle \Big\{ Q, i\int_{P'}^{P} W_1\cdot \prod_j W_0(P_j)\Big\}\Big\rangle. \tag{3.33}$$

Aquí, por supuesto, hemos utilizado el hecho de que $\{Q, W_0\} = 0$ y, otra vez, hemos utilizado (3.5).

Las ecuaciones claves hasta ahora, han sido

$$0 = i\{Q, W_0\}, \quad dWo{=}i\{Q, W_1\}, \tag{3.34}$$

siendo W_0 y W_1 una cero forma y una 1-forma sobre M, respectivamente. Este proceso tiene una generalización importante. Recursivamente se encuentra

$$dW_1 = i\{Q, W_2\}, \qquad dW_2 = i\{Q, W_3\},$$
$$dW_3 = i\{Q, W_4\}, \qquad dW_4 = 0, \tag{3.35}$$

con

$$W_2 = \mathrm{Tr}(\frac{1}{2}\psi \wedge \psi + i\phi \wedge F),$$
$$W_3 = i\mathrm{Tr}(\psi \wedge F), \qquad W_4 = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F \wedge F). \tag{3.36}$$

En estas fórmulas, ϕ, ψ y F se consideran como cero, uno y 2-formas sobre M. W_k, para $0 \leq \mathrm{k} \leq 4$, es una k-forma. Téngase en cuenta que W_k tiene $U = 4 - k$.

Si γ es un ciclo de homología k-dimensional sobre M, consideremos la integral

$$I(\gamma) = \int_\gamma W_k. \tag{3.37}$$

Esta integral es invariante BRST, puesto que

$$\{Q, I\} = \int_\gamma \{Q, W_k\} = -i\int_\gamma W_{k-1} = 0. \tag{3.38}$$

Además, salvo un conmutador BRST, I depende solamente de la clase de homología de γ. Si γ es un borde, digamos $\gamma = \partial\beta$, entonces

$$I(\gamma) = \int_\gamma W_k = \int_\beta dW_k = i\int_\beta \{Q, W_{k+1}\} = i\{Q, \int_\beta W_{k+1}\}. \tag{3.39}$$

Esta fórmula debe ser vista como la generalización de (3.32) de los cero ciclos (puntos P y P') a los k ciclos. Dice que si γ es trivial en homología, entonces $I(\gamma)$ es trivial en el sentido BRST.

Ahora estamos listos para proponer fórmulas de teoría quántica de campos, para las invariantes DONALDSON, en general.

Sean M, G y E tales que $d(\mathcal{M}) \geq 0$.

Consideremos ciclos de homología $\gamma_1, ..., \gamma_r$ de dimensiones $k_1, ..., k_r$ tales que

$$\sum_{i=1}^{r} (4 - k_r) = d(\mathcal{M}).$$

Esta fórmula asegura que $\prod_{i=1}^{r} W_i$ tiene $U = d(\mathcal{M})$. Así, sea

$$Z(\gamma_1, ..., \gamma_r) = \int(\mathcal{D}X)\exp(-\mathcal{L}'/e^2) \cdot \prod_{i=1}^{r} \int_{\gamma_i} W_{k_i} = \left\langle \prod_{i=1}^{r} \int_{\gamma_i} W_{k_i} \right\rangle. \tag{3.40}$$

Esta integral es una invariante topológica en virtud de nuestros argumentos estándar [incluyendo un uso de (3.5), (3,38) y (3.40) para demostrar que (3,40) depende solamente de las clases de homología de los γ_i]. Por supuesto, si el grupo G no es $SU(2)$, podemos escribir fórmulas similares comenzando con $W_0' = \mathrm{Tr}\,\phi^4$ u otros polinomios invariantes, en ϕ. Esto corresponde precisamente, al hecho de que un fibrado vectorial con un grupo de calibración de rango r, tiene clases características esencialmente independientes, cada una de las cuales puede ser utilizada en principio, en la construcción de invariantes DONALDSON, aunque hasta ahora, las aplicaciones interesantes provienen de la segunda clase CHERN. En Sec. 5 obtendremos, desde el punto de vista de la teoría quántica de campos, algunas fórmulas explícitas para las invariantes DONALDSON, como integrales sobre el espacio de módulos del instanton.

4 TRATAMIENTO HAMILTONANO Y TEORÍA FLOER

En la última sección, se trabajó sobre una 4-variedad arbitraria M, sin dirección preferida, de "tiempo". Como resultado, no hubo ningún formalismo hamiltonano natural y hemos utilizado técnicas FEYNMAN de integrales de línea, manipulando la carga BRST, Q, de una manera que es conocida en teoría de cuerdas. En esta sección nos especializaremos en el caso $M = Y \times R^1$, donde Y es una 3-variedad y R^1 corresponde a "tiempo". En esta situación, vamos a discutir el formalismo hamiltonano. En el proceso veremos cómo recuperar los resultados en el tratamiento no relativístico [7].[15]

En el formalismo hamiltonano, uno construye un espacio Hilbert H, un hamiltonano H y una carga fermiónica Q que satisface a $Q^2 = 0$, $[Q, H] = 0$. Uno de los principales intereses es el estudio de los grupos de cohomología de Q, que es el núcleo de Q modulo su imagen (una clase de cohomología de Q es una clase de equivalencia de estados ψ tales que $Q\psi = 0$, siendo la relación de equivalencia que ψ □ $\psi + Q\lambda$ para cada λ). Los grupos de cohomología son los estados quánticos fundamentales y son precisamente los grupos FLOER. Estos grupos están graduados por el número quántico global U introducido en Sec. 2. Recordamos que $[U, Q] = + Q$ y

[15] Al discutir el formalismo hamiltoniano, usaremos la forma (2.13) del lagrangeano. Es cierto que añadir $\int \mathrm{Tr}\, F \wedge F$ con un coeficiente muy preciso [como en (2,41)], con el fin de cancelar la acción clásica del instanton, hace al tratamiento de integral de línea de la última sección más elegante. Sin embargo, este término con el coeficiente de (2.41) sería muy embarazoso en un tratamiento hamiltoniano (corresponde en términos físicos a un ángulo imaginario θ, $\theta \sim 1/e^2$). Definitivamente la Teoría Floer parece corresponder a la cuantización de (2.13), no de (2,41).

que U es conservado modulo una constante; para $SU(2)$, esta constante es 8, correspondiente a la graduación mod 8 de los grupos FLOER.

La aserción de que los grupos de cohomología de Q tienen dimensión finita y consisten sólo de los estados quánticos fundamentales, puede sorprender en principio, a los teorizantes de cuerdas. En teoría de cuerdas, la cohomología del más o menos, análogo del operador Q_{BRST}, consiste de todo el infinito espectro de estados físicos. La diferencia es que, en teoría de cuerdas, Q_{BRST} actúa no linealmente sobre los campos. [De hecho, Q_{BRST} es cúbico en los osciladores; si c, b son los fantasmas conformales y X el campo material, entonces $Q_{\mathrm{BRST}} \sim \partial ccb + c\partial(X)^2$]. Por otra parte, en la retorcida teoría supersimétrica que estamos considerando,[16] Q actúa linealmente sobre los campos (es decir, actúa de una manera no degenerada, incluso en una aproximación lineal). En ímpetu no nulo, cada campo tiene un supercompañero, como es habitual en las teorías supersimétricas y ellos se anulan al construir la cohomología, dejando sólo a los estados quánticos fundamentales.

Una manera de demostrar que los grupos de cohomología corresponden a los estados fundamentales, involucra a un análogo de la "teoría HODGE". Para $M = Y \times R^1$, encontraremos, además de la sobrecarga Q, un segundo operador $\overline{Q}$ que satisface

$$\{Q, \overline{Q}\} = 2H. \tag{4.1}$$

También será $(\overline{Q})^2 = 0$. De (4.1), un argumento estándar, que discutiremos más adelante, muestra que la cohomología consiste en los estados fundamentales.

La clave para encontrar $\overline{Q}$, es la ecuación que desempeñó un papel central en Sec. 3, a saber:

$$T_{\alpha\beta} = \{Q, \lambda_{\alpha\beta}\} \tag{4.2}$$

Para $M = Y \times R^1$, el hamiltonano se define como

$$H = \int d^3x\, T_{00}. \tag{4.3}$$

Evidentemente, podemos encontrar un operador Q obedecer $\{Q, \overline{Q}\} = 2H$ simplemente seleccionando

$$\overline{Q} = 2\int d^3x\, \lambda^{00}. \tag{4.4}$$

Ahora demostramos que $[H, \overline{Q}] = 0$. Recordemos de Sec. 2, que $D_\alpha \lambda^{\alpha\beta} = -(U)^{\alpha\beta}$

[16] Recuerde de Sec. 2, que para $M = R^4$, Q se reduce a una de las ocho supercargas en una, $N = 2$, teoría de calibración supersimétrica.

con $(U)^{\alpha\beta} = -(U)^{\beta\alpha}$. Así,

$$-i[H, \overline{Q}] = \frac{d\overline{Q}}{dt} = 2\int_Y d^3x\, \frac{d\lambda^{00}}{dt} = -2\int_Y d^3x\, D_i(\lambda^{0i} - U^{0i}) = 0. \qquad (4.5)$$

Aquí estamos usando el hecho de que $U^{00} = 0$ (ya que $U^{\alpha\beta} = -U^{\beta\alpha}$) y que la integral de una divergencia total sobre la variedad compacta Y, es cero.

Con $H = \frac{1}{2}\{Q, \overline{Q}\}$, el hecho de que $[H, \overline{Q}] = 0$ significa que $[Q, \overline{Q}^2] = 0$. Es realmente válido, en nuestro caso, que $\overline{Q}^2 = 0$. Para ver esto de la manera más transparente, escribamos el lagrangeano de ec. (2.13) (sin el término topológico) en un lenguaje 3 + 1 dimensional. Así, con $M = Y \times R^1$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \int dt \int_M d^4x\sqrt{g}\, \mathrm{Tr}\Big[& \frac{1}{2}F_{0i}F_{0i} + \frac{1}{2}\tilde{F}_{0i}\tilde{F}_{0i} - \frac{1}{2}D_0\phi D_0\lambda - \frac{1}{2}D_i\phi D_i\lambda - i\varepsilon^{ijk}(D_j\psi_k)\chi_i \\ & + i(D_0\psi_i)\chi_i + i\psi_0 D_i\chi^i - i\eta D_0\psi_0 - i\eta D_i\psi_i + iD_\alpha\psi_\beta \cdot \chi^{\alpha\beta} \\ & - \frac{i}{2}\phi[\chi_i, \chi_i] - \frac{i}{2}\lambda[\psi_i, \psi_i] - \frac{i}{2}\lambda[\psi_0, \psi_0] - \frac{i}{2}\phi[\eta, \eta] - \frac{1}{8}[\phi, \lambda]^2\Big]. \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Aquí t (parametrizando a R^1) es "tiempo", "0" denota a la dirección del tiempo, i, j, k = 1,2, 3 varían sobre una base del espacio tangente a Y, $\chi^i = \chi^{0i}$ y $\tilde{F}_{0i} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk}$. Hemos tomado $Y \times R^1$ con signatura (+ ++ +) al escribir lo anterior. Es fácil ver que (4.6) tiene una simetría bajo $t \to -t$, junto con

$$\phi \to \lambda, \quad \lambda \to \phi, \quad \psi_i \to \chi_i, \quad \chi_i \to -\psi_i, \quad \eta \to -\psi_0, \quad \psi_0 \to \eta. \qquad (4.7)$$

Denotemos a esta operación como T. Es fácil ver que $T^2 = (-1)^F$ (siendo esta última, la operación que cambia el signo de todos los campos de anticonmutativos).

Ya que T (que aplica t → –t) es una simetría de reversión del tiempo, en teoría quántica de campos se interpretará como una operación anti-unitaria. Esto significa que los grupos FLOER, en lugar de ser espacios vectoriales complejos, tienen una estructura real. (Por supuesto, en realidad tienen una estructura entera, pero esto no es evidente desde el punto de vista de la teoría quántica de campos que estamos desarrollando aquí).

Ahora, las fórmulas explícitas para Q y $\overline{Q}$ se pueden determinar de $Q = \int_Y J^0$ y $\overline{Q} = 2\int_Y \lambda^{00}$ (con J^μ la supercorriente conservada determinada en Sec. 2). Se encuentra

$$Q = \int_Y \mathrm{Tr}[(F_{0i} + \tilde{F}_{0i})\psi_i - \eta D_0\phi - D_i\phi\chi_i - \psi_0\,[\lambda, \phi]/2],$$
$$\overline{Q} = \int_Y \mathrm{Tr}[(F_{0i} + \tilde{F}_{0i})\chi_i + \psi_0 D_0\lambda - \psi_i D_i\lambda + \eta[\phi, \lambda]/2]. \tag{4.8}$$

Vemos que, con respecto a T,

$$\overline{Q} \to Q, \qquad Q \to -\overline{Q}. \tag{4.9}$$

Por tanto, $Q^2 = 0$ implica $\overline{Q}^2 = 0$.

Antes de discutir la cohomología de Q, haremos algunos comentarios.

En el mejor de los mundos, una teoría quántica de campos tiene un hamiltonano acotado por abajo y un espacio HILBERT con una métrica LORENTZ invariante y positiva. En el presente caso estas propiedades no se mantienen. La indefinición de la energía cinética de (ϕ, λ) significa que el hamiltonano no será acotado por abajo. El producto interno del espacio HILBERT será indefinido debido a la indefinición de los términos $\eta D_0\psi_0$ y $D_0\psi_i\cdot\chi_i$.[17]. El primero de estos problemas ya se discutió al final de Sec. 2, donde se señaló que puede evitarse poniendo $\phi = -\lambda^*$ y, para nuestros propósitos actuales, vamos a aceptar esto.

Dejemos de ocuparnos temporalmente, de la positividad de la norma y revisemos el argumento estándar de teoría HODGE que relaciona la cohomología a los estados fundamentales del hamiltonano (que es semidefinido positivo puesto que estamos tomando $\phi = -\lambda^*$). Puesto que $[Q, H] = 0$, podemos representar a las clases de cohomología por los estados propios de H. Dada una de tales clases ($Q\psi = 0$), si $H\psi = \lambda\psi$ con $\lambda \neq 0$, entonces, puesto que $H = \frac{1}{2}\{Q, \overline{Q}\}$, tenemos $\psi = Q(\frac{1}{2\lambda}\overline{Q}\psi)$; de modo que ψ es de cohomología trivial. Por tanto, las clases de cohomología son los estados propios nulos de H. Recíprocamente, si $H\psi = 0$, entonces $0 = \frac{1}{2}\langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{1}{2}|Q|\psi\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\overline{Q}|\psi\rangle|^2$, así que $Q|\psi\rangle = \overline{Q}|\psi\rangle = 0$. En particular, ψ representa a una

[17] La razón es la siguiente. Al considerar un lagrangeano general con campos anticonmutativos reales α_i, cuyas derivadas tempóricas entran en el lagrangeano sólo a través de un término $\mathscr{L}_F = \int dt\, i M_{ij}\alpha_i D_0\alpha_j$ con M_{ij} una matriz simétrica constante. La quantización dará las relaciones de anticonmutación $\{\alpha_i, \alpha_j\} = (M^{-1})_{ij}$ y esto permite a los α_i ser operadores hermiteanos en un espacio HILBERT de métrica positiva, sólo si la matriz M_{ij} es definida positiva.

clase de cohomología de Q. Y si $\psi \neq 0$, esta clase no es nula. Como $[H, Q] = 0$, si ψ se puede escribir como $Q\alpha$, podemos suponer $H\alpha = 0$; pero, como hemos visto, $H\alpha = 0$ implica $Q\alpha = 0$ y así, $\psi = 0$.

Claramente, la demostración de que las clases de cohomología dan estados quánticos fundamentales no depende de la positividad del producto escalar; pero, la demostración de que los estados quánticos fundamentales son aniquilados por Q y $\overline{Q}$, sí lo hace.

Ya que en la teoría que nos interesa, el producto escalar invariante LORENTZ natural no es definido positivo, se hace necesaria una discusión de la validez del argumento anterior.

Describamos primero el cálculo del espacio de estados quánticos fundamentales, para acoplamiento pequeño.

Para acoplamiento pequeño, el espacio HILBERT quántico se construye fácilmente mediante la expansión de los mínimos clásicos del potencial. Debido a un término TR $F_{ij}F_{ij}$ en la energía, un mínimo clásico corresponde a $F_{ij} = 0$, es decir, a una conexión rasa. Una vez que seleccionamos una conexión rasa, debemos elegir ϕ y λ tales que $D_i\phi = D_i\lambda = [\phi, \lambda] = 0$, para establecer la contribución escalar a la energía a cero.

Si seleccionamos una conexión rasa que es "irreducible" (no existe subgrupo del grupo de calibración G que la deje invariante), las condiciones en la última declaración requieren que sea $\phi = \lambda = 0$. Si, además, la conexión rasa es "aislada" (sin modos cero de A_i^a), las cosas son muy simples. Al no haber modos cero bosónicos (y, por supersimetría, no haber fermiónicos), la cuantización dará lugar a un único estado quántico fundamental por cada conexión rasa irreducible, aislada. El valor de U para este estado (y por lo tanto su "dimensión" en teoría FLOER) se determinará computando la constante de orden normal del fermión. Las correcciones perturbacionales no pueden dar a este modo una energía diferente a cero, ya que esto supondría una violación de la invariancia de la característica EULER [ó Tr $(-1)^F$]. Las correcciones del instantón conducen precisamente a las consideraciones de FLOER.

Para las conexiones que no son aisladas e irreducibles hay modos cero bosónicos (y fermiónicos) y será un problema más sutil, determinar los estados quánticos fundamentales. Esta es la contraparte, en el marco actual, de los problemas conocidos en teoría FLOER con conexiones rasas reducibles y no aisladas. En términos generales, para las conexiones rasas irreducibles, pero no aisladas, hay modos cero de A_i pero no de ϕ y λ. Así, las conexiones planas formarán un espacio de módulos, de dimensión positiva y, como en Teoría MORSE degenerada, de dimensión finita, la evaluación de los grupos FLOER involucrará la cohomología del espacio de conexiones planas. Pero, para conexiones reducibles, hay modos cero de ϕ y λ y se encontrarán nuevos fenómenos, quizá de una sutil naturaleza de teoría quántica de campos.

La cuestión importante ahora, es si los estados quánticos fundamentales serían realmente aniquilados por Q, como se seguiría del argumento de la teoría HODGE, si el producto escalar sobre el espacio HILBERT quántico, fuera definido positivo. De hecho, es bastante sencillo ver en teoría de perturbaciones, que esto es así. Una conexión rasa aislada es aniquilada por Q clásicamente [ya que el lado derecho de (2.8) es cero si la conexión es rasa y todos los demás campos son nulos]. Al expandir una conexión rasa aislada, Q es cuadrática (más órdenes superiores) en osciladores y ciertamente aniquila al estado fundamental. La estructura es como predice la teoría HODGE, aunque el producto interno invariante LORENTZ no sea definido positivo.

Una manera natural de explicar esto, parece ser que uno puede definir un producto interno modificado que es definido positivo, pero no invariante LORENTZ y que quizás, es el apropiado para tener en cuenta en el argumento de "Teoría HODGE".[18]17 si $(\ |\ )_L$ es el producto escalar invariante LORENTZ sobre el espacio HILBERT $\mathscr{H}$ de la teoría quántica de campos, se puede definir un nuevo producto interno $(\ |\ )_+$ estableciendo que para $u, v \in \mathscr{H}$

$$(u \mid v)_+ = (u \mid Tv)_L \tag{4.10}$$

donde T es la operación de reversión de tiempo que se introdujo en ec. (4.7). La idea detrás de (4.10) es que mientras η, por ejemplo, es auto-adjunto en el sentido de $(\ |\ )_L$, su adjunto en el sentido de $(\ |\ )_+$ es $-\psi_0 = T\eta$. La quantización del lagrangeano (2.13) muestra que el conjugado canónico de η es $-\psi_0$, por lo que una métrica positiva sobre $\mathscr{H}$ debe ser una en la cual $-\psi_0$ es el adjunto de η. Obsérvese que en el sentido de $(\ |\ )_+$, Q y $\overline{Q}$ son mutuamente adjuntos, como lo requiere el argumento de teoría HODGE [en el sentido de $(\ |\ )_L$, Q y $\overline{Q}$ son autoadjuntos]. Por lo tanto, es muy posible que $(\ |\ )_+$ sea la estructura adecuada para usar en el argumento de teoría HODGE. Incluso podría ser apropiada adaptar este argumento en el sentido siguiente. Para mostrar que la teoría quántica no lineal de campos, bajo estudio, exis-

[18] Tal situación también surgió en un trabajo por D. OLIVE sobre una interpretación desde la teoría HODGE, del teorema "sin fantasma" de la teoría de cuerdas.

te, el producto interno definido positivo puede ser el que se debe utilizar. Así, se introduciría al invariante LORENTZ mediante (4.10), al final de la construcción para lograr la invariancia LORENTZ.

4.1 Relación de las Teorías DONALDSON y FLOER

El siguiente tema a discutir, es la conexión de las teorías FLOER y DONALDSON. Según [7], para definir invariantes DONALDSON de una 4-variedad con borde B, hay que especificar un estado en la homología FLOER de B (Como se indica en la introducción, este hecho fue realmente la motivación para el presente trabajo). En el contexto de la teoría quántica de campos, la relación de las invariantes DONALDSON con la homología FLOER tiene la siguiente interpretación (que fue anticipada por Atiyah).

En teoría quántica de campos sobre una 4-variedad cerrada M, las integrales de línea más agradables son de la forma

$$Z(\mathcal{O}) = \int(\mathscr{D}X)\, e^{-I} \cdot \mathcal{O} \tag{4.11}$$

donde I es la acción y $\mathcal{O}$ un producto de campos locales (usualmente polinomios). "X" es una abreviatura para el conjunto de variables de integración. Sin embargo, es bien sabido, que si M tiene un borde no vacío B, la integral de línea requiere de una "condición de contorno" en B. Tal condición de contorno puede consistir en, simplemente, especificar los valores del campo sobre B. Más generalmente, se escoge un estado arbitrario en el espacio HILBERT $\mathscr{H}$ de la teoría quántica formulada sobre B (o, más precisamente, la teoría formulada sobre $B \times R^1$, como en nuestra discusión anterior). Si $X|_B$ representa la restricción de toda la colección de variables de integración, a B, entonces $\mathscr{H}$ es un cierto espacio de funcionales de los $X|_B$ y un estado en $\mathscr{H}$, corresponde a un funcional $\Psi(X_B)$. La integral de línea "con condiciones de contorno determinadas por Ψ" es, precisamente,

$$Z(\mathcal{O}, \Phi) = \int(\mathscr{D}X)\exp(-\mathscr{L}'/e^2) \cdot \mathcal{O} \cdot \Psi(X_B). \tag{4.12}$$

Ahora podemos preguntarnos: ¿Para cuáles $\mathcal{O}$ y Ψ es (4.12) una invariante topológica? Los argumentos de la Sec. 3, muestran que necesitamos $Q\mathcal{O} = 0 = Q\Psi$. Por tanto, Ψ representa a una clase de cohomología FLOER. Además, con $Q\mathcal{O} = 0$, los argumentos en Sec. 3 muestran que (4.12) es cero si $\Psi = Q\Lambda$ para algún Λ; por lo tanto, (4.12) depende solamente de la clase de cohomología FLOER representada por Ψ. Por otra parte, las opciones interesantes de $\mathcal{O}$ son precisamente, las que hemos considerado en el caso en que M no tenía borde, es decir,

$$\mathcal{O} = \prod_i \int_{\gamma_i} W_{k_i} \tag{4.13}$$

Aquí los γ_i son ciertas clases de cohomología sobre M y los W_{k_i}, se construyeron en Sec. 3. Así, en (4.12) obtenemos polinomios DONALDSON con valores en (el dual de) los grupos FLOER de B.

A manera de ejemplo, supongamos que B consiste de varios componentes conexos B_i. Elijamos las clases FLOER sobre las B_i, de manera que se puede tomar $\mathcal{O} = 1$. Los componentes conexos de B se pueden considerar groseramente, como "3-branas" (generalizaciones a dimensiones superiores de las cuerdas) entrantes y salientes. En esta situación, entonces, (4.12) puede ser considerada aproximadamente como una "amplitud de dispersión de 3-branas". Más consideraciones en estas líneas, son una ruta a ciertas especulaciones acerca de la interpretación física de la teoría DONALDSON, que pueden, encontrarse en Sec. 6.

Hay una ligera modificación de (4.12) que también es significativa (y está relacionada con una reciente axiomatización de la teoría conformal de campos [27]). Agrupemos a los componentes conexos de B en "3-branas entrantes" B_i y "3-branas salientes" $\tilde{B}_j$. Supongamos dado un funcional $\Psi(X|_{B_i})$ de los valores de contorno de los campos sobre los B_i. Entonces puede utilizarse la integral de línea para calcular un funcional de los campos sobre los $\tilde{B}_j$, por

$$\tilde{\Psi}(X') = \int_{X|_{B_i} = X'} (\mathscr{D}X) \exp(-\mathscr{L}'/e^2) \cdot \mathcal{O} \cdot \Psi(X|_{B_i}). \tag{4.14}$$

[Esta fórmula requiere alguna explicación. La integral en (4.14) se realiza sobre todos los campos X cuya restricción a los $\tilde{B}_j$ es igual a un campo dado X'. La dependencia de la integral sobre X', da un funcional de X' que llamamos $\tilde{\Psi}$.] Por otra parte, $Q\tilde{\Psi} = 0$, si $Q\Psi = 0$; de hecho, si $Q\Psi = 0$, entonces todo en el lado derecho de (4.14) es Q-invariante. Así, $\Psi \to \tilde{\Psi}$ es un morfismo del producto tensorial de los grupos FLOER de los B_i, al de los de los $\tilde{B}_j$.

Una especialización de esto da lo que es quizá, la manera más bonita, en el marco del presente trabajo, de mostrar que los grupos FLOER son invariantes topológicas (y dependen de la 3-variedad Y, pero no de una elección de una métrica).

Sea $M = Y \times R$, donde R denota a la recta real, parametrizada por una variable "tiempo" t, con $-\infty < t < +\infty$. Escojamos en M una métrica de la forma

$$ds^2 = dt^2 + g_{ij}(x^k, t)dx^i dx^j \qquad (4.15)$$

donde las x^k son coordenadas sobre Y.

Dada una métrica g sobre Y, denotemos por $HF^*(Y; g)$ a los grupos FLOER de Y, determinados con esta métrica particular. Supongamos dadas dos métricas $g^{(1)}$ y $g^{(2)}$ y que queremos comparar los correspondientes grupos FLOER $HF^*(Y; g^{(1)})$ y $HF^*(Y; g^{(2)})$. Para ello, escojamos sobre $M = Y \times R$, una métrica de la forma (4.15), con el requisito adicional de que $g_{ij}(x^k, t)$ va a $g^{(1)}$ para $t \ll 0$ y a $g^{(2)}$ para $t \gg 0$. Para cada Ψ en $HF^*(Y; g^{(1)})$, (4.14) determina una $\tilde{\Psi}$ correspondiente en $HF^*(Y; g^{(2)})$. Denotemos esta transformación lineal de $HF^*(Y; g^{(1)})$ a $HF^*(Y; g^{(2)})$, como $W(g^{(2)}, g^{(1)})$. Nuestros argumentos estándar (usando el hecho de que $T_{\alpha\beta} = \{Q, \lambda_{\alpha\beta}\}$ para algún λ) demuestran que W es independiente de la elección detallada de la dependencia con respecto a t, de la métrica en (4.15).

Se puede ver fácilmente, que los W's tienen algunas propiedades formales que implican que son isomorfismos. Si $g^{(1)} = g^{(2)}$, se tiene

$$W(g^{(1)}, g^{(2)}) = 1. \qquad (4.16)$$

Pues, si $g^{(1)} = g^{(2)}$, entonces se puede determinar W escogiendo una métrica independiente de tiempo en (4.15). Así, W es igual a e^{-Ht}, con $t \to \infty$. Pero, sabemos que H aniquila a los grupos FLOER, así $W = 1$ en cohomología.

Y, dadas tres métricas $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ y $g^{(3)}$, el producto $W(g^{(3)}, g^{(2)}) \cdot W(g^{(2)}, g^{(1)})$ puede evaluarse simplemente, modificando la dependencia con respecto a t, de la métrica de (4.15). Simplemente se elige $g_{ij}(x^k, t)$ en (4.15), igual a $g^{(1)}$ para $t \to -\infty$, $g^{(2)}$ para $t \sim 0$ y $g^{(3)}$ para $t \to +\infty$. Esto da una receta de integral de línea para calcular la transición en dos etapas de $W(g^{(3)}, g^{(2)}) \cdot W(g^{(2)}, g^{(1)})$, pero también, da claramente la definición de $W(g^{(3)}, g^{(1)})$. Por lo tanto, se tiene

$$W(g^{(3)}, g^{(1)}) = W(g^{(3)}, g^{(2)}) \cdot W(g^{(2)}, g^{(1)}). \qquad (4.17)$$

Las ecuaciones (4.16) y (4.17) implican [tomando $g^{(3)} = g^{(1)}$] que $1 = W(g^{(1)}, g^{(2)}) \cdot W(g^{(2)}, g^{(1)})$; así que los W's son invertibles y, por lo tanto, son isomorfismos. Ecuación (4.17) significa entonces, que los grupos FLOER son independientes de la métrica, salvo los isomorfismos canónicos dados por los W's.

Adunador: **ALBERTO MEJÍAS**

5 FORMAS DIFERENCIALES EN EL ESPACIO DE MÓDULOS DEL INSTANTÓN

En Sec. 3, vimos cómo representar las invariantes polinómicas DONALDSON de una 4-variedad M, como funciones de correlación en una teoría cuántica de campos. Al final de Sec. 4, se observa que este cuadro tiene una generalización cuando M tiene un borde no trivial B. Hacer matemáticamente riguroso al enfoque de teoría cuántica de campos, es por supuesto una empresa formidable. Sin embargo, veremos en esta sección, que se pueden extraer del enfoque de teoría cuántica de campos, fórmulas concretas para formas diferenciales sobre el espacio de módulos de instantones, cuyas integrales sobre el espacio de módulos del instantón son las invariantes DONALDSON. Aunque inspiradas en la teoría cuántica de campos, estas son fórmulas clásicas, perfectamente rigurosas, cuyas propiedades claves pueden ser verificadas mediante manipulaciones clásicas. (Uno puede extraer de la teoría cuántica de campos una receta para las manipulaciones necesarias; aquí se indicará esto, aunque no detalladamente). Desde el punto de vista topológico, las fórmulas presentadas aquí son probablemente, sólo una manera de volver a expresar ideas de DONALDSON. Desde un punto de vista analítico, sin embargo, pueden ser útiles en la superación de algunos problemas técnicos en la teoría DONALDSON. En este debate, ignoraremos las singularidades del espacio de módulos del instantón. Por tanto, nuestra discusión no será completa. En general, las singularidades hacen contribuciones adicionales a las correlacionadoras de invariantes BRST y teoría cuántica de campos debe dar una prescripción para la evaluación de estas.

Escojamos sobre M, un fibrado vectorial E tal que $d(\mathscr{M})$, la dimensión formal del espacio $\mathscr{M}$ de módulos del instantón, es positiva. Hacemos $n = d(\mathscr{M})$. Para simplificar, consideraremos sólo el caso de un punto genérico en el espacio de módulos del instantón, en el que los instantones no tienen simetrías y la dimensión formal del espacio de módulos de instantón, es igual a la dimensión real. Estos supuestos [que son fácilmente satisfechos para $G = SU(2)$] significa que no hay modos cero de (ϕ, λ); los únicos modos cero del campo de calibración A_α, son los tangentes a $\mathscr{M}$ y los únicos modos cero fermiónicos son los modos de ψ_α que (relacionados por supersimetría, a los modos cero de A_α) también representan tangentes a $\mathscr{M}$.

Ahora, debido a los modos cero de ψ_α, la función de partición

$$Z = \int (\mathscr{D}X)\exp(-\mathscr{L}'/e^2) \tag{5.1}$$

es cero. Las integrales de línea, no cero, son de la forma

$$Z(\mathcal{O}) = \int (\mathscr{D}X)\exp(-\mathscr{L}'/e^2) \cdot \mathcal{O}; \tag{5.2}$$

donde $\mathcal{O}$ tiene $U = d(\mathcal{M})$, con el fin de poder absorber los modos cero fermiónicos.

En la aproximación de acoplamiento débil (adecuada porque estamos evaluando invariantes topológicos), $(\mathcal{D}X)$ se reduce (después de la integración de los modos no cero) a

$$d\mu = da_1 \ldots da_n d\psi_1 \ldots d\psi_n; \tag{5.3}$$

donde a_i, ψ_i, $i, j = 1 \ldots n$, son los modos cero bosónicos y fermiónicos. Es importante notar que hay una medida canónica $d\mu$ porque $d\psi_i$ se transforma opuestamente a da_i bajo cualquier cambio de base. En el límite de acoplamiento débil, $\exp(-\mathcal{L}'/e^2)$ se reduce a uno y la integral funcional sobre los modos no cero, es igual a ± 1, como lo señalamos en el Sec. 3; puede descartarse si $\mathcal{M}$ es conexo.

Ahora debemos estudiar al funcional $\mathcal{O}$. En general, tanto los modos no cero como los modos cero pueden estar presentes en $\mathcal{O}$. Si los modos no cero están presentes, debemos "integrarlos" para conseguir un funcional efectivo $\mathcal{O}'$ que dependa sólo de los modos cero. Es de la forma general

$$\mathcal{O}' = \Phi_{i_1 \ldots i_n}(a^k) \cdot \psi^{j_1} \ldots \psi^{j_n}. \tag{5.4}$$

Φ es un tensor antisimétrico con n índices —también conocido como una n-forma–– sobre la variedad n-dimensional $\mathcal{M}$. Reemplazando $\mathcal{O}$ por $\mathcal{O}'$ e insertando (5.3) y (5,4) en (5.2) obtenemos

$$Z(\mathcal{O}) = \int da_1 \ldots da_n d\psi_1 \ldots d\psi_n \Phi_{i_1 \ldots i_n}(a^k) \cdot \psi^{j_1} \ldots \psi^{j_n} = \int_{\mathcal{M}} \Phi. \tag{5.5}$$

Así, determinar una función de correlación $Z(\mathcal{O})$ en el límite acoplamiento débil conlleva la integración de los modos no cero de $\mathcal{O}$ para obtener una n-forma Φ en el espacio de módulos del instantón.

Ahora supongamos que $\mathcal{O}$ es un producto

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cdot \mathcal{O}_2 \cdot \ldots \cdot \mathcal{O}_k \tag{5.6}$$

tal que $\mathcal{O}_k$ tiene $U = n_k$ y $\sum_k n_k = n$. Integrando a los modos no cero de cualquiera de los $\mathcal{O}_r$, se obtiene un objeto

$$\mathcal{O}_r' = \Phi^{(r)}_{i_1 \ldots i_{n_r}} \psi^{j_1} \ldots \psi^{j_{n_r}}. \tag{5.7}$$

Aquí, $\Phi^{(r)}_{i_1 \dots i_{n_r}}$ se puede interpretar como una n_r-forma sobre $\mathscr{M}$. El proceso que lleva de $\mathcal{O}_r$ a $\mathcal{O}'_r$ es análogo al que lleva de $\mathcal{O}$ a $\mathcal{O}'$. Intuitivamente, podríamos esperar que sea

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}'_1 \cdot \mathcal{O}'_2 \cdot \dots \cdot \mathcal{O}'_k \tag{5.8}$$

En general, no hay ninguna razón para que (5.8) sea válida, porque al integrar los modos no cero del producto $\mathcal{O}_1 \cdot \mathcal{O}_2 \cdot \dots \cdot \mathcal{O}_k$ se podría necesitar hacer contracciones WICK entre $\mathcal{O}_i$ y $\mathcal{O}_j$ para $i \neq j$. Sin embargo, a menudo, resulta que (5.8) es válida para el menor orden en e^2 y esto es todo lo que necesitamos topológicamente. En la situación que estudiamos aquí, la fortuna nos sonríe y (5.8) es válida.

Ecuación (5.8) es equivalente a la afirmación de que las formas diferenciales Φ y antes descritas están relacionadas por

$$\Phi^{(i)} = \Phi^{(1)} \wedge \Phi^{(2)} \wedge \dots \wedge \Phi^{(k)} \tag{5.9}$$

Cuando (5.8) es válida para todos los productos de los operadores interesantes $\mathcal{O}_\alpha$, se puede dar una receta simple para calcular integrales

$$Z(\mathcal{O}_{\alpha_1} \cdot \mathcal{O}_{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \mathcal{O}_{\alpha_s}) = \int (\mathscr{D}X) \exp(-\mathscr{L}'/e^2) \mathcal{O}_{\alpha_1} \cdot \mathcal{O}_{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \mathcal{O}_{\alpha_s}. \tag{5.10}$$

Se extrae de cada $\mathcal{O}_\alpha$ uno $\mathcal{O}$ a (por integración de los modos no cero) una forma diferencial (de grado apropiado) $\Phi^{(\alpha)}$ sobre $\mathscr{M}$. Así,

$$Z(\mathcal{O}_{\alpha_1} \dots \mathcal{O}_{\alpha_n}) = \int_{\mathscr{M}} \Phi^{(\alpha_1)} \wedge \Phi^{(\alpha_2)} \wedge \dots \wedge \Phi^{(\alpha_n)} \tag{5.11}$$

En nuestro estudio de la teoría DONALDSON en Sec. 3, los operadores interesantes fueron

$$\mathcal{O}^{(\gamma)} = \int_\gamma W_{k_\gamma}. \tag{5.12}$$

Aquí γ es un ciclo de homología sobre M, de dimensión k_γ y los W_{k_γ} para $k_\gamma = 0$, ..., 4, son formas diferenciales sobre M, de grado k_γ, definidas como sigue:

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\phi^2, \\ W_1 &= \mathrm{Tr}(\phi \wedge \psi) \\ W_2 &= \mathrm{Tr}(\frac{1}{2} \psi \wedge \psi + i\phi \wedge F), \\ W_3 &= i\mathrm{Tr}(\psi \wedge F), \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$W_4 = - \quad (F \wedge F).$$

W_k tiene $U = 4 - k$; así, con cada $\mathcal{O}^{(\gamma)}$ debemos asociar una $4 - k_\gamma$-forma $\Phi^{(\gamma)}$ sobre $\mathscr{M}$. Ecuación (5.8) es válida para productos arbitrarios de los $\mathcal{O}^{(\gamma)}$, por lo que las invariantes DONALDSON son simplemente

$$Z(\mathcal{O}^{(\gamma_1)} \ldots \mathcal{O}^{(\gamma_s)}) = \int_{\mathscr{M}} \Phi^{(\gamma_1)} \wedge \Phi^{(\gamma_2)} \wedge \ldots \wedge \Phi^{(\gamma_s)}. \tag{5.14}$$

Para obtener "Fórmulas explícitas para la teoría DONALDSON", sólo necesitamos integrar los modos no cero de las W's. Esto es fácil de hacer. Dondequiera que F aparezca en (5.13), podemos, al orden más bajo en e^2, simplemente sustituirlo por el campo instantonal clásico. Dondequiera que ψ aparezca en (5.13), simplemente la reemplazamos por funciones ondales de modo cero.[19] Por lo tanto, todo lo que hay que hacer es integrar a ϕ a partir de las W's. Al hacer esto, los términos relevantes en la acción son

$$\frac{\mathscr{L}'}{e^2} = \int_M d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2e^2} \phi D_\alpha D^\alpha \lambda - \frac{i}{2e^2} \lambda [\psi_\alpha, \psi^\alpha] + \ldots \right]. \tag{5.15}$$

"Integrar a ϕ" significa calcular la integral

$$\begin{aligned} \langle \phi^\alpha(x) \rangle &= \int \mathscr{D}\phi \mathscr{D}\lambda \exp -(\mathscr{L}'/e^2) \cdot \phi^\alpha(x) \\ &= \int \mathscr{D}\phi \mathscr{D}\lambda \exp \left[-\frac{1}{2e^2} \int \sqrt{g}\, \phi D_\alpha D^\alpha \lambda \right] \\ &\quad \times \phi^\alpha(x) \cdot \int_M \frac{i}{2e^2} \operatorname{Tr} \lambda [\psi_\alpha, \psi^\alpha] + \ldots \end{aligned} \tag{5.16}$$

(Hemos expandido a exp $[-(i/2e^2) \int \operatorname{Tr} \lambda [\psi, \psi]$ para extraer el término lineal en λ, que es el único que sobrevive después de la integración sobre ϕ y λ. El +.. . a la derecha de (5.16) es irrelevante para el orden más bajo en e^2.) la dependencia de ϕ y λ

---

[19] Para ser más precisos, elegir una base $u_{(1)_\alpha}^{\ a}(x) \ldots u_{(n)_\alpha}^{\ a}(x)$ de funciones ondales de modo cero clásicas. Luego pongamos $\psi_\alpha^{\ a}(x) = \Sigma_i \psi^i u_{(i)_\alpha}^{\ a}(x)$, donde los ψ^i son las coordenadas fermiónicas de modo cero que aparecen en (5.3). La misma sustitución $\psi_\alpha^{\ a}(x) = \Sigma_i \psi^i u_{(i)_\alpha}^{\ a}(x)$, debe ser comprendida en las fórmulas subsiguientes. La elección de los $u_{(i)}$ no importa porque (usando la misma base de modos cero de A_α) se cancela de $d\mu = da_1 \ldots da_n d\psi_1 \ldots d\psi_n$.

se reduce a la integral gaussana

$$\int \mathscr{D}\phi \mathscr{D}\lambda \exp\left[-\frac{1}{2e^2}\int \sqrt{g}\, \phi D_\alpha D^\alpha \lambda\right] \cdot \phi^a(x)\lambda^b(y) \tag{5.17}$$

a la que denotaremos por $\langle \phi^a(x)\lambda^b(y)\rangle$.[20]

Según las reglas de integración gaussanas

$$\langle \phi^a(x)\lambda^b(y)\rangle = -2e^2 G^{ab}(x, y) \tag{5.18}$$

donde $G^{ab}(x, y)$ es la función GREEN del laplaceano $\Delta = D_\alpha D^\alpha$. G se define como la única solución de

$$\Delta G^{ab}(x, y) = \delta^{ab}\delta^4(x-y) \tag{5.19}$$

Sustituyendo (5.18) en (5.16), vemos que

$$\langle \phi^a(x)\rangle = -i\int_M d^4y\sqrt{g}\, G^{ab}(x, y)\, [\psi_\alpha(y), \psi^\alpha(y)]_b. \tag{5.20}$$

Nótese que los factores de e^2 se han cancelado, una prueba crucial. La ecuación (5.20), con ψ_a sustituido por sus modos cero, es la fórmula requerida para expresar ϕ_a en términos de modos de cero.

Sustituyendo ϕ en (5.13) por $\langle\phi\rangle$ dondequiera que aparezca, tenemos nuestras fórmulas buscadas, para las formas diferenciales $\Phi^{(\gamma)}$ sobre $\mathscr{M}$, que corresponden a los ciclos de homología γ sobre M. Si γ es un 0-ciclo, digamos un punto P, entonces

$$\Phi^{(\gamma)} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\langle\phi(P)\rangle^2. \tag{5.21}$$

Si γ es un 1-ciclo, entonces

$$\Phi^{(\gamma)} = \int_\gamma \mathrm{Tr}(\langle\phi\rangle \wedge \psi). \tag{5.22}$$

Para un 2-ciclo,

$$\Phi^{(\gamma)} = \int_\gamma \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}\psi \wedge \psi + i\langle\phi\rangle \wedge F\right). \tag{5.23}$$

Para un 3-ciclo,

$$\Phi^{(\gamma)} = i\int_\gamma \mathrm{Tr}(\psi \wedge F). \tag{5.24}$$

Y si γ, es un 4-ciclo, digamos un múltiple s de la clase fundamental $[M]$ de M, Φ^γ es

[20] Ignoramos al determinante de (ϕ, λ), que sabemos que cancelará a otros determinantes de campos que no están escritos en (5.17).

sólo una función constante (es decir, una 0-forma cerrada) en $\mathscr{M}$. La constante es igual a $-s/2 \cdot \int_M \mathrm{Tr}\, F \wedge F$. En general, un k-ciclo sobre M, da un operador de $U = 4 - k$, correspondiente a la aplicación DONALDSON $H_k(M) \rightarrow H^{4-k}(\mathscr{M})$.

Alguien podría haber considerado al razonamiento en Secs. 3 y 4, falto de precisión matemática. Sin embargo, hemos llegado a fórmulas perfectamente concretas para las formas diferenciales $\Phi^{(\gamma)}$ sobre el espacio de módulos del instantón.

En este punto, vale preguntarse sobre lo que hay que considerar para demostrar que las $\Phi^{(\gamma)}$ tienen las propiedades necesarias para que las

$$Z(\gamma_1, \ldots, \gamma_r) = \int_{\mathscr{M}} \Phi^{(\gamma_1)} \wedge \Phi^{(\gamma_2)} \wedge \ldots \wedge \Phi^{(\gamma_r)} \tag{5.25}$$

sean invariantes topológicas.

En realidad hay cuatro pasos.

(a) Hay que mostrar que las $\Phi^{(\gamma)}$ son cerradas. Esto no es evidente, pero se puede comprobar por un cálculo completamente clásico; no hace falta información de teoría cuántica de campos.

(b) Hay que mostrar que $\Phi^{(\gamma)}$ se cambia por una forma exacta si cambiamos γ en su clase de homología. Basta probar que si γ es un borde, digamos $\gamma = \partial\beta$, entonces $\Phi^{(\gamma)} = dt^{(\beta)}$ para algunas forma diferencial $t^{(\beta)}$ sobre $\mathscr{M}$.

Aquí realmente obtenemos alguna visión útil desde teoría quántica de campos. Si $t^{(\beta)}$ tal que $\Phi^{(\gamma)} = dt^{(\beta)}$ existe, hay muchas de tales $t^{(\beta)}$ y nos gustaría una "mejor" opción para poder empujar la teoría DONALDSON a sus límites y lidiar con las singularidades y la no-compacidad de $\mathscr{M}$ en la medida de lo posible. La teoría quántica de campos, realmente, da una fórmula canónica, pero no totalmente obvia, para $t^{(\beta)}$. Si $\gamma = \partial\beta$, entonces

$$\mathcal{O}^{(\gamma)} = \int_\gamma W_{k_\gamma} = \int_\beta dW_{k_\gamma} = i\{Q, \int_\beta W_{k_\gamma+1}\}. \tag{5.26}$$

En el límite pequeño de e^2, $\mathcal{O}^{(\gamma)}$ se reduce a nuestra forma diferencial $\Phi^{(\gamma)}$, Q se reduce a la derivada exterior d sobre $\mathscr{M}$ y $W_{k_\gamma+1}$ se reduce (usando las mismas fórmulas dadas arriba) a una forma diferencial $t^{(\beta)}$ sobre $\mathscr{M}$. La ecuación (5.26) es la fórmula deseada $\mathcal{O}^{(\gamma)} = dt^{(\beta)}$.

(c) Hay que mostrar que, bajo un cambio en la métrica $g_{\alpha\beta}$ de M, las $Z(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ son invariantes. Aquí, otra vez, la teoría cuántica de campos da fórmulas canónicas que no son completamente evidentes. Antes de escribir fórmulas, expresemos el problema precisamente. Consideremos una familia de métricas sobre M, parametrizadas por un espacio de parámetros S. Sea $X = M \times S$ el espacio total de la familia. Denotemos la fibra de X, por encima de un punto $s \in S$ como M_s. Cada M_s tiene una métrica g_s. Las formas diferenciales $\Phi^{(\gamma)}$ están definidas sobre cada fibra; denotémoslas por $\Phi^{(\gamma)}(s)$. Para mostrar que las $Z(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ son independientes de la métrica, hay que mostrar que existen formas diferenciales cerradas $\hat{\Phi}^{(\gamma)}$ sobre X, cuyas restricciones a las M_s coinciden con las $\Phi^{(\gamma)}(s)$. Esto se puede hacer de inmediato, en forma canónica, mediante nuestras fórmulas estándar. Bajo un desplazamiento de $s \in S$ la métrica de M cambia. Sea $\delta g_{\alpha\beta}(P)$ el cambio de las componentes $g_{\alpha\beta}(P)$ de la métrica de M en un punto $P \in M$ y en alguna base del espacio tangente a M en P. Los $\delta g_{\alpha\beta}(P)$ son 1-formas cerradas sobre S.

De nuestras fórmulas generales, bajo un cambio en la métrica de M, el cambio en $\Phi^{(\gamma)}$ es

$$\delta\Phi^{(\gamma)} = \left\langle \int_\gamma W_{k_\gamma} \cdot \frac{1}{2e^2} \int_M \sqrt{g}\, \delta g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \right\rangle \tag{5.27}$$

donde $\langle\ \rangle$ es una instrucción para integrar a los modos no cero. Utilizando nuestra fórmula favorita: $T_{\alpha\beta} = \{Q, \lambda_{\alpha\beta}\}$, podemos reescribir (5.27) en la forma

$$\delta\Phi^{(\gamma)} = \left\{ Q, \left\langle \int_\gamma W_{k_\gamma} \cdot \frac{1}{2e^2} \int_M \sqrt{g}\, \delta g^{\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta} \right\rangle \right\}. \tag{5.28}$$

Algo intuitivamente, (5.28) afirma que $\delta\Phi^{(\gamma)}$, que es el cambio de $\Phi^{(\gamma)}$ con respecto a un cambio en la métrica, es un conmutador BRST, correspondiente a una forma diferencial cerrada en el espacio de módulos que no contribuirá en (5,25). Esta es la conclusión que queremos y el argumento es esencialmente correcto, pero la descripción anterior no es una manera muy canónica expresar las cosas, porque según cambia la métrica, el espacio de módulos también varía (es decir, no hay ninguna conexión canónica sobre el haz fibrado X). Una mejor descripción es la siguiente. Sobre $X = M \times S$, una n-forma puede ser descompuesta como la suma de lo que podríamos llamar $(k, n - k)$-formas (una k-forma sobre M veces una $n - k$-forma sobre S). en este sentido, $\Phi^{(\gamma)}$ es una $(n, 0)$ forma en X, para algún n. Por otra parte,

$$P = \left\langle \int_\gamma W_{k_\gamma} \cdot \frac{1}{2e^2} \int_M \sqrt{g}\, \delta g^{\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta} \right\rangle \tag{5.29}$$

puede ser interpretado como una $(n - 1, 1)$ forma. [Recordemos que δg es una 1-forma sobre S o en otras palabras una (0,1)-forma]. La derivada exterior en las fibras de $X = M \times S$ es lo que hemos denotado $-iQ$, mientras que δ es la derivada exterior desde la base S. La derivada exterior sobre el espacio total X es $d = \delta - iQ$. La ecuación (5.28), junto con $\{Q, \Phi^{(\gamma)}\} = 0$ y $\delta P = 0$ (lo cual puede ser verificado usando la forma de λ dada en Sec. 2), significa que la forma diferencial $\hat{\Phi}^{(\gamma)} = \Phi^{(\gamma)} - iP\, \Phi^{(\gamma)}$ es aniquilada por d, y esta es la forma cerrada deseada sobre X cuya restricción a las fibras devuelve a $\Phi^{(\gamma)}$.
(d) finalmente, por supuesto, para hacer afirmaciones rigurosas acerca de las integrales

$$\int_{\mathscr{M}} \Phi^{(\gamma_1)} \wedge \Phi^{(\gamma_2)} \wedge \ldots \wedge \Phi^{(\gamma_r)} \tag{5.30}$$

uno debe saber que el espacio de módulos del instanton existe, tiene singularidades que no son muy malas y no se comporta demasiado mal bajo un cambio en la métrica. Estas cuestiones implican un arduo análisis [4, 5]. En estas preguntas el punto de vista de la presente sección no ofrece ninguna nueva perspicacia, excepto la esperanza de que el análisis de las fórmulas anteriores cerca de singularidades de $\mathscr{M}$ pueda dar una nueva visión sobre el criterio necesario para "no muy malas". Tal esperanza es apoyada por la experiencia de los físicos, con instantones.

En principio, en Sec. 3, dimos fórmulas para invariantes DONALDSON —como funciones de correlación en teoría cuántica de campos— que son válidas, independientemente de si existe el espacio de módulos del instanton y qué propiedades tiene. Desde ese punto de vista más fundamental, las consideraciones de esta sección son sólo una receta para evaluar las funciones de correlación bajo circunstancias favorables. Pero hacer riguroso a ese fundamental punto de vista, requerirá un avance considerable en la teoría quántica de campos constructiva.

6. INTERPRETACIÓN FÍSICA

En esta sección final, se propone analizar el significado físico del presente trabajo. Aquí se encuentran muchas de las preguntas más intrigantes.

La simetría fermiónica que hemos utilizado, es muy evocadora de la simetría BRST. Su uso es bastante similar al uso de la simetría BRST en teoría de cuerdas. Por lo que es natural pensar que, en un marco adecuado, esta simetría se presenta en el ajuste por calibración BRST de una subyacente teoría invariante por calibración. De ser así, esa teoría es de un tipo muy inusual. La ecuación más importante de este documento es la afirmación de que el tensor tensión es un conmutador "BRST".

$$T_{\alpha\beta} = \{Q, \lambda_{\alpha\beta}\}. \tag{6.1}$$

Esta afirmación no es válida en ajuste por calibración BRST ordinario de teorías de calibración ordinarias. Es válida en ajuste por calibración BRST de la teoría de cuerdas, porque en ese caso el punto de partida es la acción NAMBU, que es generalmente covariante en un sentido dos dimensional. Esta covariancia general conduce directamente a (6.1). La lección aquí es que (6.1) es una señal de covariancia general. La "Teoría quántica de campos topológica " estudiada en este trabajo, es muy similar a una versión ajustada por calibración BRST de una subyacente teoría quántica de campos, generalmente covariante. Para ser más terminante sobre ello, lo que hemos estado debatiendo debe considerarse como una teoría quántica de campos generalmente covariante, unitaria (en el sentido BRST), renormalizable, en 4 dimensiones.

Alguien podría sorprenderse de que se le atribuya la propiedad de la covariancia general a una teoría sin gravitones. Al respecto, los siguientes comentarios pueden ser esclarecedores. En relatividad general, uno comienza con el campo gravitacional $g_{\alpha\beta}$ y una acción generalmente covariante. Luego uno se expande alrededor de un campo clásico. Se encuentra el hecho de que ninguna métrica (excepto $g_{\alpha\beta}$ = 0, generalmente considerada ilegal) es invariante bajo difeomorfismos. Usualmente uno se expande alrededor de $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ (la métrica MINKOWSKI) y esto rompe la covariancia general hasta la simetría POINCARÉ. Groseramente hablando (no en sentido técnico), el gravitón sin masa debe entonces considerarse como un bosón GOLDSTONE de covariancia general (local) espontáneamente rota. En un espíritu similar, los bosones de calibración, amásicos, en teorías de calibración, reflejan la ruptura de la invariancia de calibración local hasta una simetría global. Si la simetría local es cabal, como en QCD, hay no hay mesones de calibración amásicos.

Desde la aparición del concepto de confinamiento del color en QCD, ha sido natural preguntarse si en relatividad general, podría haber una fase análoga en la que la covariancia general esté confinada e incólume.[21] A primera vista, este concepto parece paradójico. Para la covariancia general incólume, no debe haber nin-

[21] esta pregunta ha sido considerada durante años, por muchos físicos, aunque no parece haber muchas referencias publicadas. La posibilidad de la covariancia general intacta, en el contexto de la teoría de campos de cuerdas ha sido considerada en [28].

gún tensor métrica (o, por lo menos, debe tener valor esperado cero). Sin una métrica, no se sabe cómo deben propagarse las señales, por lo que parece que no puede haber física.

Parece que aquí hemos topado con una resolución de estas paradojas. Con covarianza general cabal, de hecho, no puede haber propagación de las señales ni física local. Por lo tanto, en quantización sobre una 3-variedad Y, los espacios Hilbert físicos (en el sentido BRST) resultan ser objetos topológicos globales, los grupos FLOER y los únicos observables que se pueden determinar son invariantes topológicas globales, las invariantes DONALDSON (discutidos en la sección 3) y las invariantes DONALDSON relativas (discutidas en la sección 4). (Recordar de finales de Sec. 4 que estas últimas, incluso, incluyen " dispersión de tres-branas".).

Una vez que aceptado que la teoría discutida en este documento es generalmente covariante, es claro que puede haber otras teorías más o menos similares. Es posible encontrar una versión con campos gravitatorios explícitos [29]. Tal vez exista una versión con ruptura espontánea de covariancia general y gravitones dinámicos.

Uno de los verdaderos misterios es cómo exponer una teoría que se manifieste generalmente covariante, cuyo ajuste por calibración BRST dé (por lo menos con alguna aproximación) la "teoría quántica topológica de campos" que hemos considerado. Esto es reminiscente de la situación en teoría de cuerdas, donde el origen de la covariancia general del espacio-tiempo es bastante obscuro. Está bastante claro que la teoría considerada aquí no surgirá del ajuste por calibración BRST de una teoría de campos generalmente covariante convencional con un número finito de campos. No sería demasiado sorprendente si se presenta como una aproximación de baja energía a alguna versión de la teoría de campos de cuerdas, en una fase en que la covariancia general está incólume. (Esta posibilidad es apoyada en cierta medida por la existencia [30] de modelos sigma 1 + 1-dimensionales con una simetría fermiónica a lo BRST y con la propiedad que el operador vértice gravitonal es un conmutador BRST. Estos modelos sigma pueden corresponder a una realización de la covariancia general cabal en la teoría de cuerdas). La adecuada incorporación de la covariancia general en teoría de cuerdas puede tener algunas características inusuales que se reflejan en la aplicación correcta de la covariancia general incluso en el mundo de baja energía y estas características pueden ser relevantes para física observable, quizás hasta la desaparición de la constante cosmológica.

Referencias

1. Donaldson, S.: An application of gauge theory to the topology of four manifolds. J. Differ. Geom.**18**, 269 (1983); The orientation of Yang-Mills moduli

spaces and 4-manifold topology. J. Differ. Geom. **26**, 397 (1987); Polynomial invariants for smooth four-manifolds. Oxford preprint

2. Freed, D., Uhlenbeck, K.: Instantons and four manifolds. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1984

3. Belavin, A., Polyakov, A., Schwartz, A., Tyupkin, Y.: Phys. Lett. B 59, 85 (1975)

4. Taubes, C.; Self-dual Yang-Mills connections on non-self-dual 4-manifolds. J. Differ. Geom. 17, 139 (1982)

5. Uhlenbeck, K.: Connections with Lp bounds on curvature. Commun. Math. Phys. 83, 31 (1982). Removable singularities in Yang-Mills fields. Commun. Math. Phys. 83, 11 (1982)

6. Floer, A.: An instanton invariant for three manifolds. Courant Institute preprint (1987); Morse theory for fixed points of Symplectic diffeomorphisms. Bull. AMS 16, 279 (1987)

7. Atiyah, M.F.: New invariants of three and four dimensional manifolds. In: The Symposium on the Mathematical Heritage of Hermann Weyl, Wclls, R. et al. (eds.). (Univ. of North Carolina, May, 1987)

8. Braam, P.J.: Floer homology groups for homology three spheres. University of Utrecht Mathematics preprint 484, November, 1987

9. Witten, E.: Supersymmetry and Morse theory. J. Differ. Geom. 17,661 (1982)

10. ’t Hooft, G.: Computation of the quantum effects due to a four dimensional pseudoparticle. Phys. Rev. **D 14**, 3432 (1976)

11. Jackiw, R., Rebbi, C: Phys. Rev. Lett. **37**, 172 (1976)

12. Callan, C.G, Dashen, R., Gross, D.J.: Phys. Lett. **63B**, 334 (1976)

13. Atiyah, M.F., Hitchin, N., Singer, I.: Self-duality in Riemannian geometry. Proc. Roy. Soc. London **A 362**, 425 (1978)

14. Affleck, I., Dine, M., Seiberg, N.: Dynamical supersymmetry breaking in supersymmetric QCD. Nucl. Phys B 241, 493 (1984); Dynamical supersymmetry breaking in four dimensions and its phenomenological implications. Nucl. Phys. B 256, 557 (1985)

15. Seiberg, N.: IAS preprint (to appear)

16. Novikov, V.A, Shifman, M.A., Vainshtein, A.J., Zakharov, V.I.: Nucl. Phys. B 229, 407 (1983) Amati, D., Konishi, K., Meurice, Y., Rossi, G.C, Veneziano, G.: Non-perturbative aspects in supersymmetric gauge theories. Physics Reports (to appear)

17. Friedan, D., Martinec, E., Shenker, S.: Nucl. Phys. B 271, 93 (1986)

18. Peskin, M.: Introduction to string and superstring theory, SLAC-PUB-4251 (1987)

19. Green, M.B., Schwarz, J.H., Witten, E.: Superstring theory. Cambridge: Cambridge University Press 1987

20. Witten, E.: Global anomalies in string theory. In: Symposium on anomalies, geometry, and topology. White, A., Bardeen, W. (eds.), especially pp. 90-95. Singapore: World Scientific 1985

21. Becchi, C., Rouet, A., Stora, R.: The abelian Higgs-Kibble model, unitarity of the S-operator. Phys. Lett. 69 B, 309 (1974); Renormalization of gauge theories. Ann. Phys 98, 287 (1976)

22. Tyupin, I.V.: Gauge invariance in field theory and in statistical physics in the operator formalism. Lebedev preprint FlAN No. 39 (1975), unpublished

23. Kugo, T., Ojima, I.: Manifestly covariant canonical formulation of Yang-Mills theories. Phys. Lett. 73 B, 459 (1978); Local covariant operator formalism of non-abelian gauge theories and quark confinement problem. Supp. Prog. Theor. Phys. 66, 1 (1979)

24. Polchinski, J.: Scale and conformal invariance in quantum field theory. Univ. of Texas preprint UTTG-22-87

25. D'Adda, A., DiVecchia, P.: Supersymmetry and instantons. Phys. Lett. 73 B, 162 (1978)

26. Witten, E.: An SU(2) anomaly. Phys. Lett. 117 B, 432 (1982)

27. Segal, G.: Oxford preprint (to appear)

28. Horowitz, G.T., Lykken, J., Rohm, R., Strominger, A.: Phys. Rev. Lett. 57, 283 (1986)

29. Witten, E.: Topological gravity. IAS preprint, February, 1988

30. Witten, E.: Topological sigma models. Commun. Math. Phys. (to appear)

31. Witten, E.: Topological Quantum Field Theory. Commun. Math. Phys. 117, 353 (1988)