ALEPH SUB – CERO

SERIE DE DIVULGACIÓN

$\aleph_0$ 2009 – II $\aleph_0$

ECUACIONES DIFERENCIALES
APLICACIONES A TRANSITORIOS DE CIRCUITOS

Segunda parte

Carlos A. Garbarello [1]

Tema: Ingeniería

Índice:

Temario: Revisión de ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas a coeficientes constantes. Estudio de transitorios de circuitos RLC. Régimen transitorio en circuitos de dos mallas.

Iniciaré esta segunda parte del tema: Ecuaciones Diferenciales, Aplicación a transitorios de circuitos, con una revisión del tema Ecuaciones diferenciales lineales de 2º orden con coeficientes constantes homogéneas y no homogéneas

---

[1] Carlos A. Garbarello, Profesor Titular de la Cátedra de Laboratorio de Mediciones Eléctricas II Escuela Técnica Nº 9 "Ing. Luis A. Huergo" Secretaría de Educación del Gobierno Autónomo de la Ciudad de Buenos Aires. garby@speedy.com.ar cgarbarello@yahoo.com.ar

vistas en la cátedra de Análisis Matemático. Revisaré la resolución de estas ecuaciones diferenciales, para luego dedicarme a la aplicación a transitorios de circuitos.

1.- Ecuaciones Diferenciales lineales de 2º orden con coeficiente constantes.

1.1.- Homogéneas.

Responden a la forma: $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ donde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ y el segundo miembro es nulo.

1.2.- No homogéneas.

Responden a la forma: $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ donde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ y el segundo miembro no es nulo.

2.- Teoremas: Ecuaciones Diferenciales lineales de 2º orden con coeficiente constantes y homogéneas.

2.1.- Teorema 1: Si $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ tiene como solución a $y_1(x)$, entonces $Cy_1(x)$ también es solución de la ecuación diferencial.

H] $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ **(1)** es una ecuación diferencial lineal de 2º orden, con coeficientes constantes y homogénea.

$y_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial anterior.

T] $y = Cy_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial anterior.

D] $y = Cy_1(x)$

$y' = Cy_1'(x)$

$$y'' = Cy_1''(x)$$

reemplazando en **(1)**: $a_0Cy_1''(x) + a_1Cy_1'(x) + a_2Cy_1(x) = 0$

C es factor común del primer miembro de la expresión anterior, por lo tanto:

$$C\left[a_0y_1''(x) + a_1y_1'(x) + a_2y_1(x)\right] = 0$$

pero el término entre corchetes del primer miembro es cero ya que $y_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial **(1)**.

Entonces $y = Cy_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial **(1)**.

<u>2.2.- Teorema 2:</u> Si $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$ admite dos soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$, entonces la combinación lineal de ambas también es solución de la ecuación diferencial.

H] $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$ **(2)** es una ecuación diferencial lineal de 2º orden, con coeficientes constantes y homogénea.

$y_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial anterior.

$y_2(x)$ es solución de la ecuación diferencial anterior.

T] $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ es solución de la ecuación diferencial anterior.

D] $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$

$y' = C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x)$

$y'' = C_1y_1''(x) + C_2y_2''(x)$

reemplazando en **(2)**:

$$a_0\left[C_1y_1''(x) + C_2y_2''(x)\right] + a_1\left[C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x)\right] + a_2\left[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\right] = 0$$

factoreando por grupos el primer miembro:

$$C_1\left[a_0y_1''(x)+a_1y_1'(x)+a_2y_1(x)\right]+C_2\left[a_0y_2''(x)+a_1y_2'(x)+a_2y_2(x)\right]=0$$

pero el primer término entre corchetes del primer miembro es cero ya que $y_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial y el segundo término entre corchetes del primer miembro es cero ya que $y_2(x)$ es solución de la ecuación diferencial.

Entonces $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ es solución de la ecuación diferencial **(2)**.

<u>2.3.- Teorema 3:</u> Si $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$ admite dos soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ para las que su Wronskiano es distinto de cero, entonces la combinación lineal de ambas también es solución general de la ecuación diferencial.

H] $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$ **(3)** es una ecuación diferencial lineal de 2º orden, con coeficientes constantes y homogénea.

$y_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial anterior.

$y_2(x)$ es solución de la ecuación diferencial anterior.

$W\left[y_1(x);y_2(x)\right]\neq 0$

T] $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ es solución general de la ecuación diferencial anterior.

D] Por el Teorema 2 podemos decir que la combinación lineal $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ es solución de la ecuación diferencial, lo que falta demostrar es que se trata de la solución general.

Para hacerlo debemos demostrar que C_1 y C_2 quedan unívocamente determinados cuando se prefija un punto $o\equiv(x_0;y_0)$ y un valor para la pendiente en ese punto $y'(o)$.

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

$y' = C_1.y_1'(x) + C_2.y_2'(x)$

Formamos el sistema:

$y_0 = C_1.y_1(x_0) + C_2.y_2(x_0)$

$y_0' = C_1.y_1'(x_0) + C_2.y_2'(x_0)$

Este sistema de incógnitas C_1 y C_2 tendrá solución única cuando el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas sea distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}_{x_0} = W\left[y_1(x); y_2(x)\right]_{x_0} \neq 0 \text{ por hipótesis.}$$

Luego C_1 y C_2 quedan unívocamente determinadas, pudiendo garantizar que $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ es la solución general de **(3)**.

3.- Resolución de Ecuaciones Diferenciales lineales de 2º orden con coeficiente constantes y homogéneas.

Sabemos que estas ecuaciones diferenciales responden a la forma: $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ **(4)** donde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ y el segundo miembro es nulo.

Vamos a probar si $y = e^{rx}$ con $r \in C$ es solución de la ecuación diferencial anterior.

$y = e^{rx}$

$y' = re^{rx}$

$y'' = r^2 e^{rx}$

$$a_0 r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_2 e^{rx} = 0 \quad \textbf{(5)}$$

Debemos demostrar que la expresión anterior da cero o en su defecto, si aceptamos que da cero, debemos determinar que condiciones debe cumplir *r* para que la expresión se anule.

$$e^{rx}\left[a_0 r^2 + a_1 r + a_2\right] = 0$$

donde $e^{rx}\left[a_0 r^2 + a_1 r + a_2\right] = 0$ recibe el nombre de ecuación característica y es la que para ciertos valores de *r* anula la ecuación **(5)**.

La ecuación característica es una ecuación de segundo grado y de acuerdo al valor de su discriminante podremos tener las siguientes tres soluciones para sus raíces:

I] r_1 y r_2 raíces reales y distintas, por lo tanto:

$$y_1 = e^{r_1 x} \quad \text{y} \quad y_2 = e^{r_2 x}$$

II] r_1 y r_2 raíces reales e iguales, por lo tanto:

$$y_1 = y_2 = e^{r_1 x}$$

III] r_1 y r_2 raíces complejas conjugadas, por lo tanto:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \quad \text{y} \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$$

Estudiemos cada uno de estos casos:

I] r_1 y r_2 raíces reales y distintas, por lo tanto:

$$y_1 = e^{r_1 x} \quad \text{y} \quad y_2 = e^{r_2 x}$$

por el teorema 2: $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ es solución de la ecuación diferencial **(4)**.

$$W\left[e^{r_1x};e^{r_2x}\right]=\begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x} \end{vmatrix}= e^{r_1x}e^{r_2x}(r_2-r_1)\neq 0 \quad \text{ya que} \quad r_1\neq r_2$$

por lo tanto $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ es la solución general de la ecuación diferencial **(4)**.

II] r_1 y r_2 raíces reales e iguales, por lo tanto: $y_1=e^{r_1x}$ mientras que para y_2 probaremos con: $y_2=xe^{r_1x}$

Si: $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$

$y_2=xe^{r_1x}$

$y_2'=e^{r_1x}+xr_1e^{r_1x}$

$y_2''=r_1e^{r_1x}+r_1e^{r_1x}+r_1^2xe^{r_1x}$

reemplazando:

$$a_0(2r_1e^{r_1x}+r_1^2xe^{r_1x})+a_1(e^{r_1x}+r_1xe^{r_1x})+a_2x.e^{r_1x}=0$$

$$e^{r_1x}\left[x(a_0r_1^2+a_1r_1+a_2)+(2a_0r_1+a_1)\right]=0$$

pero: $a_0r_1^2+a_1r_1+a_2=0$ por ser la ecuación característica evaluada en su raíz.

$2a_0r_1+a_1=0$ por ser la derivada primera de la ecuación característica evaluada en su raíz doble. Recordemos que una raíz múltiple de orden n de una función polinómica satisface a las derivadas de la función hasta el orden n-1.

Entonces: $y_2=xe^{r_1x}$ es solución de la ecuación diferencial **(4)**.

y por el teorema 2: $y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}$ es solución de la ecuación diferencial **(4)**.

$$W\left[e^{r_1x};x.e^{r_1x}\right]=\begin{vmatrix} e^{r_1x} & xe^{r_1x} \\ r_1e^{r_1x} & e^{r_1x}+r_1xe^{r_1x}\end{vmatrix}= e^{2.r_1x}(1+r_1x-r_1x)=e^{2r_1x}\neq 0$$

por lo tanto: $y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}$ es la solución general de la ED **(4)**.

III] r_1 y r_2 raíces complejas conjugadas, por lo tanto:

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x} \quad \text{y} \quad y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$$

y por el teorema 2: $y=C_1e^{(\alpha+i\beta)x}+C_2e^{(\alpha-i\beta)x}$ es solución de la ecuación diferencial **(4)**.

El Wronskiano es distinto de cero ya que como en el caso I $r_1\neq r_2$ por lo tanto:

$y=C_1e^{(\alpha+i\beta)x}+C_2e^{(\alpha-i\beta)x}$ es la solución general de la ED **(4)**.

Si seguimos operando:

$$y=C_1e^{\alpha.x}e^{i\beta.x}+C_2e^{\alpha.x}e^{-i\beta.x}$$

pero $e^{i\beta.x}=\cos(\beta x)+isen(\beta x)$ y $e^{-i\beta x}=\cos(\beta x)-isen(\beta x)$

reemplazando: $y=e^{\alpha.x}\left[C_1(\cos\beta x+isen\beta x)+C_2(\cos\beta x-isen\beta x)\right]$

reordenando: $y=e^{\alpha.x}\left[(C_1+C_2)\cos\beta x+(C_1-C_2)isen\beta x\right]$

haciendo: $A=C_1+C_2$ y $B=\left(C_1-C_2\right)i$

$y=e^{\alpha x}\left[A\cos\beta x+Bsen\beta x\right]$ Solución general de la ED **(4)**.

4.- Resolución de Ecuaciones Diferenciales lineales de 2º orden con coeficiente constantes y no homogéneas.

Sabemos que estas ecuaciones diferenciales responden a la forma: $a_0y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$ donde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ y el segundo miembro no es nulo.

4.1.- Teorema.

Si $a_0y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$ **(6)** es una ecuación diferencial lineal, de 2º orden y no homogénea, su solución general es la suma de una solución particular cualquiera más la solución general de la ecuación diferencial homogénea correspondiente a la dada.

H] $a_0y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$ es una ecuación diferencial lineal, de 2º orden y homogénea

Solución particular: $y_p / a_0y''_p + a_1y'_p + a_2y_p = f(x)$

Solución de la homogénea: $y_h / a_0y''_h + a_1y'_h + a_2y_h = 0$

T] $y = y_h + y_p$ es la solución general de la ecuación diferencial **(6)**.

D] $y = y_h + y_p$

$y' = y'_h + y'_p$

$y'' = y''_h + y''_p$

$$a_0(y''_h + y''_p) + a_1(y'_h + y'_p) + a_2(y_h + y_p) = f(x)$$

$$(a_0y''_h + a_1y'_h + a_2y_h) + (a_0y''_p + a_1y'_p + a_2y_p) = f(x)$$

pero: $a_0y''_h + a_1y'_h + a_2y_h = 0$ pues es y_h solución de la homogénea, por lo tanto:

$$a_0 y_p'' + a_1 y_p' + a_2 y_p = f(x)$$

entonces: $y = y_h + y_p$ es solución general de **(6)**.

Nuestro problema, ahora, es calcular la solución particular ya que la solución de la homogénea la hemos visto en el punto 3.

Para calcular la solución particular tenemos dos métodos:

a) Método de variación de parámetros o de Lagrange.
b) Método de los coeficientes indeterminados.

Procederemos a revisar estos dos métodos.

4.2.- Método de variación de parámetros o de Lagrange.

Tenemos la siguiente ecuación diferencial lineal de 2º orden y no homogénea: $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ donde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ y el segundo miembro no es nulo.

Solución: $y = y_h + y_p$

a.- Cálculo de y_h: $a_0 y_h'' + a_1 y_h' + a_2 y_h = 0$

$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ Solución de la homogénea: Función Complementaria.

b.- Cálculo de y_p :

$$y_p = L_1(x) y_1(x) + L_2(x) y_2(x)$$

Para determinar $L_1(x)$ y $L_2(x)$ se deben establecer dos condiciones una obligatoria y otra arbitraria.

<u>*Condición obligatoria:*</u> y_p debe ser solución de la ecuación diferencial dada.

<u>*Condición arbitraria:*</u> se la elige para facilitar la resolución.

$$y_p = L_1 y_1 + L_2 y_2$$

$$y_p' = L_1' y_1 + L_1 y_1' + L_2' y_2 + L_2 y_2'$$

en esta última expresión fijamos la condición arbitraria: $L_1' y_1 + L_2' y_2 = 0$ **(a)**

por lo tanto: $y_p' = L_1 y_1' + L_2 y_2'$

$$y_p'' = L_1' y_1' + L_1 y_1'' + L_2' y_2' + L_2 y_2''$$

como y_p es solución particular:

$$a_0.(L_1' y_1' + L_1 y_1'' + L_2' y_2' + L_2 y_2'') + a_1(L_1 y_1' + L_2 y_2') + a_2(L_1 y_1 + L_2 y_2) = f(x)$$

reordenando:

$$L_1(a_0 y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + L_2(a_0 y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) + a_0(L_1' y_1' + L_2' y_2') = f(x)$$

donde : $a_0 y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0$ y $a_0 y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0$ por ser y_1 e y_2 las soluciones de la ecuación diferencial homogénea de la dada; por lo tanto:

$$a_0(L_1' y_1' + L_2' y_2') = f(x)$$

de donde:

$$L_1' y_1' + L_2' y_2' = \frac{f(x)}{a_0} \quad \textbf{(b)}$$

y para que $y_p = L_1 y_1 + L_2 y_2$ sea solución de la ecuación diferencial dada se deben verificar **(a)** y **(b)**:

$$L_1' y_1 + L_2' y_2 = 0$$

$$L_1' y_1' + L_2' y_2' = \frac{f(x)}{a_0}$$

Este sistema de ecuaciones con dos incógnitas es no homogéneo y de solución única ya que el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas es el

Wronkiano de y_1 y y_2 (solución general de la ecuación homogénea correspondiente a la dada). Halladas las soluciones L_1' y L_2' las integramos y determinamos L_1 y L_2.

La constante de integración la omitimos, pues de tenerla en cuenta, se reduce a una sola constante con las consideradas en el cálculo de y_h .

4.3.- Ejemplo:

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^2}$$

$$y = y_h + y_p$$

Cálculo de y_h

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos las raíces:

$$r_1 = r_2 = 2$$

por lo tanto: $\quad y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

Cálculo de y_p

$$y_p = L_1 e^{2x} + L_2 x e^{2x}$$

formamos el sistema:

$$L_1' e^{2x} + L_2' x e^{2x} = 0$$

$$L_1' 2e^{2x} + L_2'(e^{2x} + 2xe^{2x}) = \frac{e^{2x}}{x^2 . a_0} \quad \text{pero } a_0 = 1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x}(1+2x) \end{vmatrix} = e^{4x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 1+2x \end{vmatrix} = e^{4x}(1+2x-2x) = e^{4x}$$

$$\Delta L_1' = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ \dfrac{e^{2x}}{x^2} & e^{2x}(1+2x) \end{vmatrix} = -\frac{e^{4x}}{x} \qquad L_1' = -\frac{1}{x}$$

$$\Delta L_2' = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \dfrac{e^{2x}}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{e^{4x}}{x^2} \qquad L_2' = \frac{1}{x^2}$$

$$L_1 = -\int \frac{1}{x} dx + C = -\ln x + C$$

$$L_2 = -\int \frac{1}{x^2} dx + K = \frac{1}{x} + K$$

obviamos las constantes de integración por lo explicado en el párrafo anterior y obtenemos la solución particular:

$$y_p = -\ln x e^{2x} + \frac{1}{x} x e^{2x}$$

$$y_p = -\ln x e^{2x} + e^{2x}$$

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} - \ln x e^{2x} + e^{2x}$$

$$y = (C_1 + 1)e^{2x} + C_2 x e^{2x} - \ln x e^{2x}$$

Pero $C_1 + 1 = C_3$ es decir otra constante, por lo tanto:

$$y = C_3 e^{2x} + C_2 x e^{2x} - \ln x e^{2x}$$

$$y = e^{2x}(C_3 + C_2 x - \ln x)$$

4.4.- Método de los coeficientes indeterminados.

Este método permite hallar una solución particular para $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$, donde $f(x)$ es una función cuyos términos son de la forma $Kx^m e^{nx} \cos\alpha x$ o $Kx^m e^{nx} sen\alpha x$, donde K, $n \wedge \alpha \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}_0$.

a.- Cálculo de y_h: $a_0 y_h'' + a_1 y_h' + a_2 y_h = 0$

$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ Solución de la homogénea: Función Complementaria.

b.- Cálculo de y_p :

Para calcular la solución particular se considera a $f(x)$, a la cual se la deriva hasta que sus términos no generen partes variables nuevas; cada término de $f(x)$ genera un grupo de partes variables, cada uno de estos grupos deberá ser sometido al siguiente análisis:

a) Comprobar si algún grupo está contenido en otro, si esto ocurre, se lo desestima.
b) Observar si alguna parte de algún grupo es a su vez parte variable de la función complementaria, en tal caso, dicho grupo será multiplicado por x y vuelto a analizar, controlando si sus parte variables se repiten en la función complementaria, en tal caso se lo vuelve a multiplicar por x y así

sucesivamente hasta que ninguna parte de ningún grupo se repita en la función complementaria.

Se forma un único grupo con todas las partes variables así calculadas. La solución particular que se busca es una combinación lineal de las partes variables que integran este último grupo. Para determinar los coeficientes de la combinación lineal debe recurrirse al concepto de solución particular y al principio de yuxtaposición.

4.5.- Ejemplo:

$y'' - y' = x + xe^x$
$y = y_h + y_p$

Cálculo de y_h

$y_h'' - y_h' = 0$

$r^2 - r = 0$ resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos las raíces:

$$r_1 = 0 \quad \text{y} \quad r_2 = 1$$

por lo tanto: $y_h = C_1 + C_2 e^x$ con partes variables 1 y e^x.

Cálculo de y_p

$f(x) = x + xe^x$

$f'(x) = 1 + e^x + xe^x$

$f''(x) = 0 + e^x + e^x + xe^x$

Partes variables: Primer término $(1;x)$

Segundo término (e^x, xe^x)

Como se repiten en la complementaria, multiplicamos por x y obtenemos:

$(x; x^2)$ y $(\mathrm{x}e^x, x^2\ e^x)$ y formamos un único grupo $(x; x^2; xe^x; x^2\ e^x)$

$$y_p = Ax^2 + Bx + Cxe^x + Dx^2e^x$$

$$y'_p = 2Ax + B + Ce^x + Cxe^x + 2Dxe^x + Dx^2e^x$$

$$y''_p = 2A + Ce^x + Ce^x + Cxe^x + 2De^x + 2Dxe^x + 2Dxe^x + Dx^2e^x$$

$$y''_p - y'_p = 2A + Ce^x + Ce^x + Cxe^x + 2De^x + 2Dxe^x + 2D.x.e^x + Dx^2e^x$$
$$-2Ax - B - Ce^x - Cxe^x - 2Dxe^x - Dx^2e^x = x + xe^x$$

armamos, por comparación de términos entre los miembros, el sistema que nos permitirá calcular los coeficientes:

$$\begin{cases} 2A - B = 0 \\ C + C + 2D - C = 0 \\ C + 2D - 2D - C - 2D = 1 \\ D - D = 0 \\ -2A = 1 \end{cases}$$

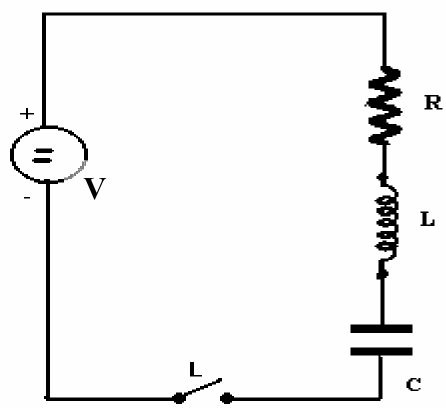
Resolviendo el sistema: A = -1/2; B = -1; C = ½ y D =-1

$$y_p = -\frac{x^2}{2} - x - xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$$

$$y = C_1 + C_2e^x - \frac{x^2}{2} - x - xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x \quad \text{Solución General}$$

5.- Régimen transitorio en circuitos RLC.

5.1.- Régimen transitorio en corriente continua.



En el siguiente circuito, al cerrar la llave L se producirá un fenómeno transitorio que hemos de estudiar.

En el instante $t = 0$ en que se cierra la llave L, la intensidad i, variable y función del tiempo, será cero ya que la inductancia en ese instante ha de actuar como una llave abierta o una resistencia de valor infinito, cayendo toda la tensión de la fuente en ella.

Cuando el tiempo tienda a infinito la intensidad i, variable y función del tiempo, también será cero ya que el capacitor actuará como una llave abierta, cayendo en él toda la tensión de la fuente.

En medio tenemos el régimen transitorio, y en él, las caídas de tensión en cada elemento serán:

$$v_r = iR$$

$$v_L = L\frac{di}{dt}$$

$$v_c = \frac{1}{C}\int idt$$

Si aplicamos la ley de las mallas de Kirchoff al circuito RLC de la figura, obtendremos la siguiente expresión:

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = V$$

si derivamos esta última expresión: $$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

reordenando: $$\frac{d^2i}{dt} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{CL} = 0$$

$$i'' + \frac{R}{L} i' + \frac{1}{CL} i = 0$$

y esta última es una ecuación lineal de 2º orden con coeficientes constantes y homogénea, la misma la resolvemos ya hemos explicado en el punto 3, es decir:

$$r^2 + \frac{R}{L} r + \frac{1}{CL} = 0 \qquad\qquad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

reemplazando: $r_{1,2} = -\frac{\frac{R}{L}}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 4\frac{1}{LC}}}{2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$

y si hacemos: $A = -\frac{R}{2L}$ y $B = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$

entonces: $r_1 = A + B$ y $r_2 = A - B$

Se nos presentarán los tres casos que estudiamos y eso dependerá del valor del discriminante:

Caso I] $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} > 0$ $B > 0$ entonces r_1 y r_2 raíces reales y distintas.

Solución: $i(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$

Para determinar las constantes aplicamos las condiciones iniciales:

a) en $t = 0$ el valor de $i = 0$

b) en $t = 0$ la tensión de la fuente cae en la inductancia

de a: $0 = C_1 + C_2$ es decir $C_1 = -C_2$ **(a)**

de b: $$V = L\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = L\left.\frac{d(C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t})}{dt}\right|_{t=0}$$

$$V = L(C_1r_1 + C_2r_2) \quad \textbf{(b)}$$

(a) y **(b)** forman un sistema de ecuaciones que nos permitirá determinar el valor de las constantes, por ejemplo en **(b)** reemplazamos C_1 por $-C_2$ y hallamos C_2 y luego con **(a)** hallamos C_1.

Caso II] $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0$ $B = 0$ entonces r_1 y r_2 raíces reales e iguales.

Solución: $$i(t) = C_1e^{r_1t} + C_2te^{r_2t}$$

Para determinar las constantes aplicamos las condiciones iniciales de la misma forma que en el caso I.

Caso III] $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0$ $B < 0$ entonces r_1 y r_2 raíces complejas conjugadas.

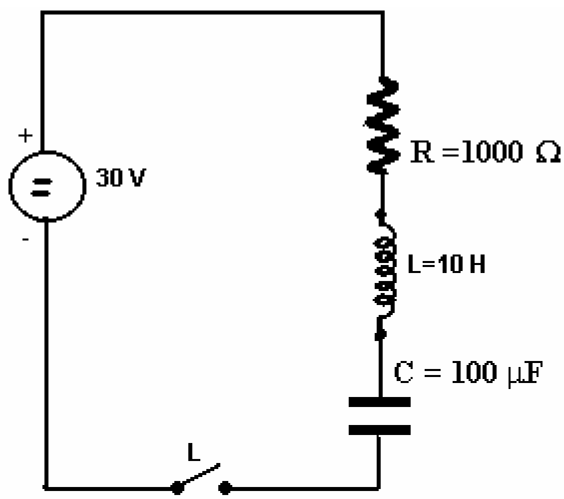
Solución: $$i(t) = e^{At}(K_1\cos Bt + K_2 senBt)$$

Para determinar las constantes aplicamos las condiciones iniciales de la misma forma que en el caso I.

5.2.- Resolución de regímenes transitorios para el circuito RLC del punto 5.1.

Basaremos, por supuesto, la resolución en todo lo desarrollado en el punto anterior.

Caso I] Sea el siguiente circuito:



$$A=-\frac{R}{2L}=-\frac{1000\Omega}{2(10H)}=-50$$

$$B=\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=\sqrt{\left(\frac{1000\Omega}{2(10H)}\right)^2-\frac{1}{(10H)(100)10^{-6}F}}=38,73$$

$B>0$ entonces r_1 y r_2 raíces reales y distintas

$$r_1=A+B=-50+38,73=-11,27 \qquad \text{y} \qquad r_2=A-B=-50-38,73=-88,73$$

$$i(t)=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}=C_1e^{-11,27t}+C_2e^{-88,73t} \quad \textbf{(1)}$$

Condiciones iniciales:

para $t=0$ la $i=0$ y $V=v_L$

reemplazando en **(1)**: $0 = C_1 + C_2$ es decir $C_1 = -C_2$

$$V = L(C_1 r_1 + C_2 r_2) = 10\left[C_1(-11,27) + C_2(-88,73)\right] = 30V$$

$$-11,27C_1 - 88,73C_2 = 3$$

reemplazando $C_1 = -C_2$

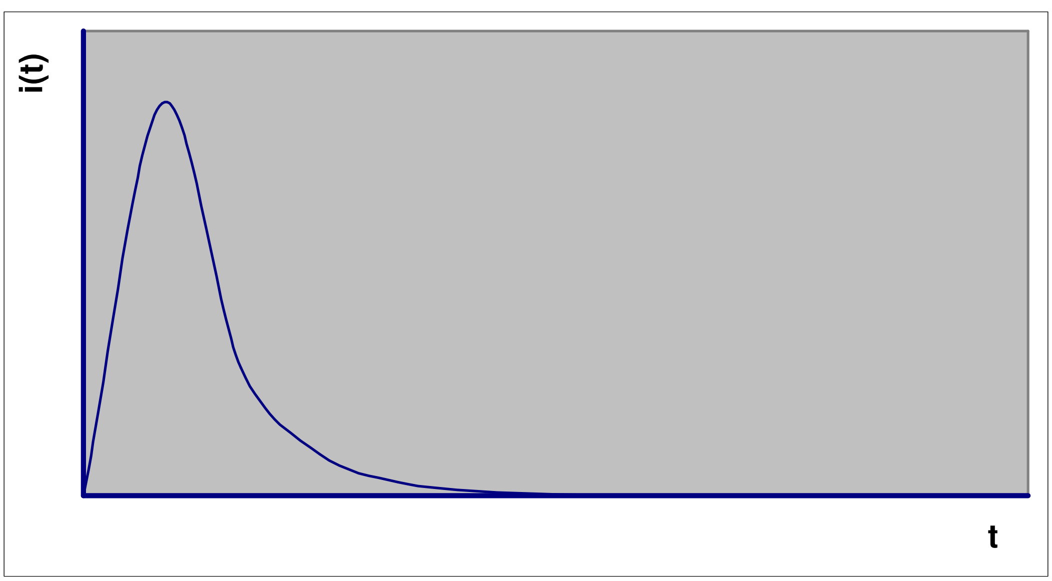
$$11,27C_2 - 88,73C_2 = 3$$

$$C_2 = -0,03873 \quad \text{y} \quad C_1 = 0,03873$$

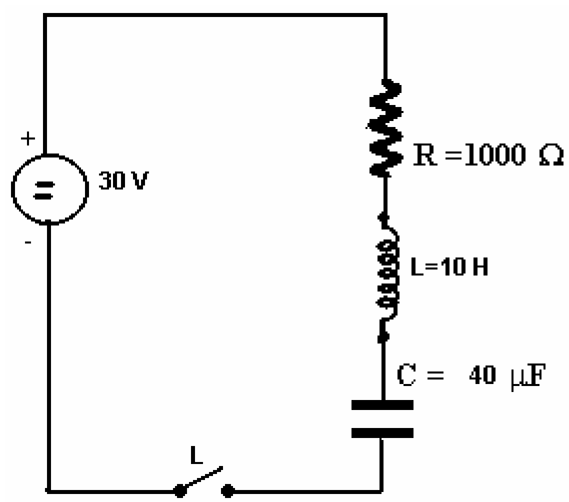
con lo que:

$$i(t) = 0,03873e^{-11,27t} - 0,03873e^{-88,73t}$$

La representación gráfica que nos muestra el desarrollo en el tiempo de este efecto o régimen transitorio es el siguiente:



Caso II] Sea el siguiente circuito:



$$A = -\frac{R}{2L} = -\frac{1000\Omega}{2(10H)} = -50$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \sqrt{\left(\frac{1000\Omega}{2(10H)}\right)^2 - \frac{1}{(10H)(40)10^{-6}F}} = 0$$

$B = 0$ entonces r_1 y r_2 raíces reales e iguales

$r_1 = A + B = -50 + 0 = -50$ y $r_2 = A - B = -50 - 0 = -50$

$$i(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 t e^{r_2 t} = C_1 e^{-50t} + C_2 t e^{-50t} \quad \textbf{(2)}$$

Condiciones iniciales:

para $t = 0$ la $i = 0$ y $V = v_L$

reemplazando en **(2)**: $0 = C_1 + C_2 .0$ es decir $C_1 = 0$

$$V = L\frac{di}{dt}\bigg|_{t=0} = L\frac{d(C_1e^{r_1t} + C_2te^{r_2t})}{dt}\bigg|_{t=0} = L(C_1r_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} + C_2tr_2e^{r_2t})\Big|_{t=0}$$

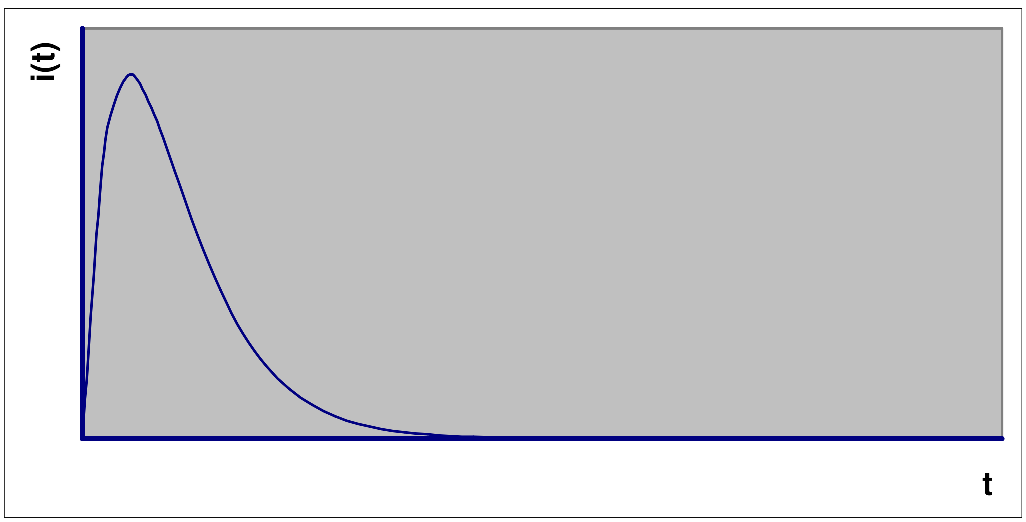
$$30V = 10C_2$$

$$C_2 = 3 \quad \text{y} \quad C_1 = 0$$

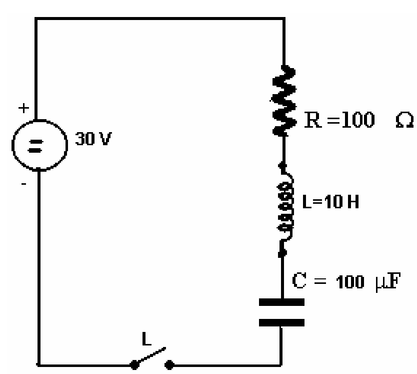
con lo que:

$$i(t) = 3te^{-50t}$$

La representación gráfica que nos régimen transitorio es el siguiente: muestra el desarrollo en el tiempo de este efecto



Caso III] Sea el siguiente circuito:



$$A = -\frac{R}{2L} = -\frac{100\Omega}{2(10H)} = -5$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \sqrt{\left(\frac{100\Omega}{2(10H)}\right)^2 - \frac{1}{(10H)(100)10^{-6}F}} = \pm j31,22$$

$B < 0$ entonces r_1 y r_2 raíces complejas conjugadas

$r_1 = A + B = -5 + j31,22$ y $r_2 = A - B = -5 - j31,22$

$$i(t) = e^{At}(K_1 \cos Bt + K_2 sen Bt) = e^{-5t}(K_1 \cos 31,22t + K_2 sen 31,22t) \quad \textbf{(3)}$$

Condiciones iniciales:

para $t = 0$ la $i = 0$ y $V = v_L$

reemplazando en **(3)**: $0 = K_1 + K_2.0$ es decir $K_1 = 0$

$$V = L\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = L\left.\frac{de^{-5t}(K_1 \cos 31,22t + K_2 sen 31,22t)}{dt}\right|_{t=0}$$

$$= L\left[-5e^{-5t}(K_1 \cos 31,22t + K_2 sen 31,22t) + e^{-5t}(-31,22K_1.sen 31,22t + 31,22K_2 \cos 31,22t)\right]\Big|_{t=0}$$

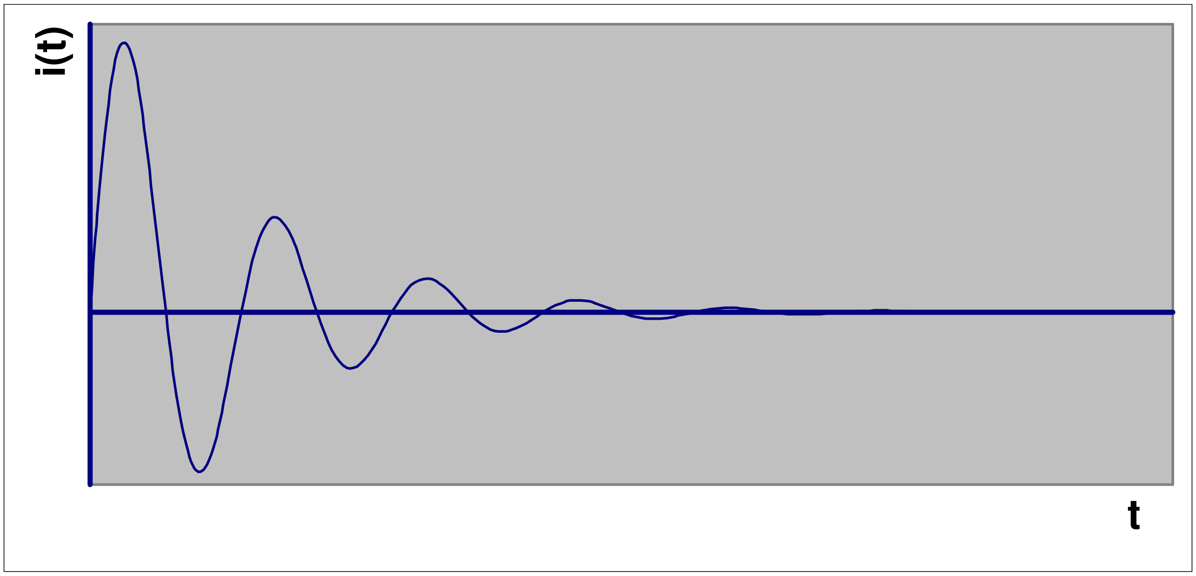
$$= L\left[-5.1.(0.1 + K_2.0) + 1(-31,22.0.0 + 31,22K_2.1\right]\Big| = 10.31,22K_2 = 30V$$

$$K_2 = 0,0961$$

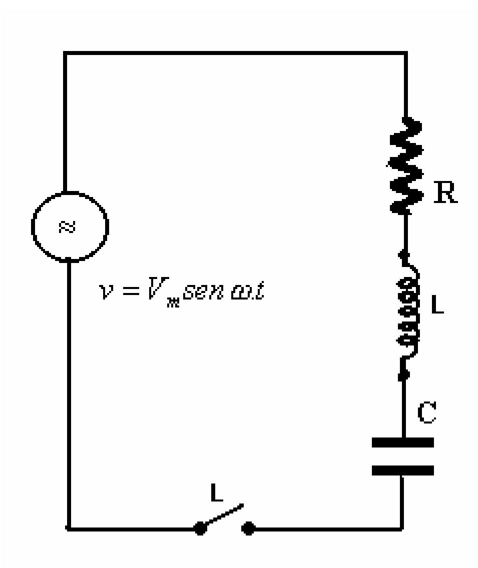
con lo que:

$$i(t) = 0,0961e^{-5t} sen 31,22t$$

La representación gráfica que nos muestra el desarrollo en el tiempo de este efecto o régimen transitorio es el siguiente:



5.3.- Régimen transitorio en corriente alterna.



Al cerrar la llave L la fuente aplica una tensión v variable en el tiempo de forma sinusoidal.

Aplicando la ley de las mallas de Kirchoff tenemos:

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = V_m sen\omega t$$

derivando: $$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt} + \frac{i}{C} = V_m\omega\cos\omega t$$

reordenado la expresión anterior y dividiendo por L miembro a miembro:

$$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{i}{LC} = \frac{V_m\omega}{L}\cos\omega t \quad \textbf{(1)}$$

ecuación diferencial de 2º orden, con coeficiente constantes y no homogénea.

Para resolver esta ecuación diferencia y estudiar el régimen transitorio respectivo, emplearemos uno de los métodos de resolución explicados en los apartados anteriores, por ejemplo, el método de los coeficientes indeterminados.

Determinación de la función complementaria y_h :

Resolvemos $\qquad i'' + \dfrac{R}{L} i' + \dfrac{i}{LC} = 0$

Esto ya lo sabemos hacer, de manera que obtendremos una de las siguientes soluciones:

$$i_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

$$i_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 t e^{r_1 t}$$

$$i_h = e^{r_1 t}(K_1 \cos \beta t + K_2 sen \beta t)$$

Determinación de la solución particular y_p :

$f(x) = V_m \omega \cos \omega t$

$f'(x) = -V_m \omega^2 sen \omega t$ $\qquad$ Partes variables: $(sen \omega t; \cos \omega t)$

$f''(x) = -V_m \omega^3 \cos \omega t$

por lo tanto:

$$i_p = A \cos \varpi t + B.sen \omega t$$

$$i'_p = -A.\omega sen \varpi t + B \omega \cos \omega t$$

$$i''_p = -A \omega^2 \cos \varpi t - B \omega^2 sen \omega t$$

reemplazando en **(1)**:

$$-A\omega^2\cos\varpi t - B\omega^2 sen\omega t - \frac{R}{L}A\omega sen\varpi t + \frac{R}{L}B\omega\cos\omega t + \frac{A}{LC}\cos\varpi t + \frac{B}{LC}sen\omega t$$
$$= \frac{\omega V_m}{L}\cos\omega t$$

en esta última expresión agrupamos los términos semejantes:

$$\cos\varpi t(-A\omega^2 + \frac{R}{L}B\omega + \frac{A}{LC}) = \frac{\omega.V_m}{L}\cos\omega t \quad \textbf{(a)}$$

$$sen\omega t(-B\omega^2 - \frac{R}{L}A\omega + \frac{B}{LC}) = 0 \quad \textbf{(b)}$$

reordenando las dos últimas expresiones:

$$\begin{cases} A\left(\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right) + B\dfrac{R\omega}{L} = \dfrac{\omega V_m}{L} \\ \\ A\left(-\dfrac{R.\omega}{L}\right) + B\left(\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right) = 0 \end{cases}$$

resolviendo este sistema hallaremos los coeficientes *A* y *B*.

Si planteamos el determinante del coeficiente de las incógnitas y lo resolvemos, obtendremos:

$$\Delta = \left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2\omega^2}{L^2} = \frac{1}{L^2C^2} - \frac{2\omega^2}{LC} + \omega^4 + \frac{R^2\omega^2}{L^2}$$

operando: $$\Delta = \frac{1 - 2\omega^2 LC + \omega^4 L^2C^2 + R^2C^2\omega^2}{L^2C^2}$$

por otro lado desarrollando el determinante de la incógnita *A*:

$$\Delta A = \frac{\omega V_m}{L}\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) = \frac{\omega V_m}{L^2 C} - \frac{\omega^3 V_m}{L} = \frac{\omega V_m C - \omega^3 V_m L C^2}{L^2 C^2}$$

$$A = \frac{\Delta A}{A} = \frac{\omega V_m C - \omega^3 V_m L C^2}{1 - 2\omega^2 LC + \omega^4 L^2 C^2 + R^2 C^2 \omega^2} = \frac{\omega V_m C(1 - \omega^2 LC)}{1 - 2\omega^2 LC + \omega^4 L^2 C^2 + R^2 C^2 \omega^2}$$

dividiendo numerador y denominador por $\omega^2 C^2$:

$$A = \frac{\Delta A}{A} == \frac{V_m \dfrac{(1-\omega^2 LC)}{C.\omega}}{\dfrac{1}{C^2\omega^2} - 2\dfrac{L}{C} + \omega^2 L^2 + R^2}$$

pero: $\dfrac{(1-\omega^2 LC)}{C\omega} = \dfrac{1}{\omega C} - \omega L$ y $\dfrac{1}{C^2\omega^2} - 2\dfrac{L}{C} + \omega^2 L^2 = \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2$

reemplazando en la expresión de *A*:

$$A = \frac{\Delta A}{A} == \frac{-V_m\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$$

por otro lado desarrollando el determinante de la incógnita *B*:

$$\Delta B = \frac{\omega^2 R V_m}{L^2}$$

con lo cual:

$$B = \frac{\Delta B}{\Delta} = \frac{\dfrac{\omega^2 R V_m}{L^2}}{\dfrac{1 - 2\omega^2 LC + \omega^4 L^2 C^2 + R^2 C^2 \omega^2}{L^2 C^2}} = \frac{C^2 \omega^2 R V_m}{1 - 2\omega^2 LC + \omega^4 L^2 C^2 + R^2 C^2 \omega^2}$$

dividiendo ambos miembros por $\omega^2 C^2$ y operando nos encontraremos con un denominador idéntico al de la resolución de la incógnita *A*, por tanto:

$$B = \frac{\Delta B}{A} == \frac{V_m R}{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$$

y como : $i_p = A\cos\varpi t + Bsen\omega t$

$$i_p = \frac{-V_m\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega . C}\right)}{R^2 + \left(\omega . L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}\cos\varpi t + \frac{V_m R}{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} sen\omega t$$

$$i_p = \frac{V_m}{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}\left[Rsen\varpi t - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos\omega t\right]$$

pero sabemos que $Z^2 = R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2$ donde *Z* es la impedancia del circuito y que $x_{L-C} = \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$ donde *x* es la reactancia resultante del circuito, por lo tanto:

Ecuaciones diferenciales
Aplicaciones a transitorios de circuitos

$$i_p = \frac{V_m}{Z^2}\left[Rsen\varpi t - x_{L-C}\cos\omega t\right] = \frac{V_m}{Z}\left[\frac{R}{Z}sen\varpi t - \frac{x_{L-C}}{Z}\cos\omega t\right]$$

donde $sen\varphi = \frac{x_{L-C}}{Z}$ y $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$ donde φ es el ángulo de fase de la impedancia de carga.

$$i_p = \frac{V_m}{Z}\left[\cos\varphi sen\varpi t - sen\varphi\cos\omega t\right]$$

y por trigonometría: $sen(\omega t - \varphi) = \cos\varphi sen\varpi t - sen\varphi\cos\omega t$

$$i_p = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} sen(\omega t - \varphi)$$

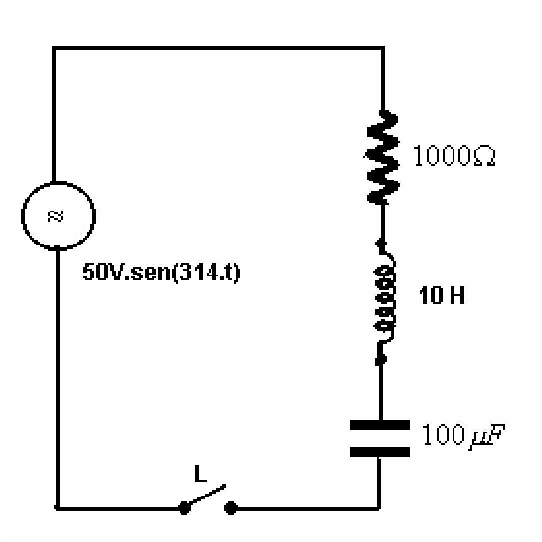
Las soluciones completas podrán ser, según la solución de la homogénea:

$$i = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} sen(\omega t - \varphi)$$

$$i = C_1 e^{r_1 t} + C_2 t e^{r_1 t} + \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} sen(\omega t - \varphi)$$

$$i = e^{r_1 t}(K_1 \cos\beta t + K_2 sen\beta t) + \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} sen(\omega t - \varphi)$$

5.4.- Ejemplo.



$$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{i}{LC} = \frac{V_m \omega}{L}\cos \omega t$$

$$i'' + 100i' + 1000i = 1570\cos 314t$$

Resolvemos la homogénea:

$i'' + 100.i' + 1000.i = 0$ y obtenemos $r_1 = -11,27$ y $r_2 = -88,73$

$$i_h = C_1 e^{-11,27t} + C_2 e^{-88,73t}$$

Hallamos la solución particular:

$$i_p = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} sen(\omega t - \varphi)$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \text{ donde } \varphi = arco\cos\left(\frac{R}{Z}\right)$$

Ecuaciones diferenciales
Aplicaciones a transitorios de circuitos

$$Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$Z=\sqrt{(1000\Omega)^2+\left(314\left(10H\right)-\frac{10^6}{\left(314\right)\left(100\right)\mu F}\right)^2}=3265\Omega$$

$$\cos\varphi=\frac{1000\Omega}{3265\Omega}=0,3062787 \text{ donde } \varphi=arco\cos 0,3062787=0,4\pi$$

$$i_p=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}sen(\omega t-\varphi)=\frac{50V}{3265\Omega}sen(314t-0,4\pi)$$

$$i_p=\frac{50V}{3265\Omega}sen(314t-72^{\circ}09'53'')=0,015Asen(314t-0,4\pi)$$

La intensidad completa será:

$$i=C_1e^{-11,27.t}+C_2e^{-88,73.t}+0,015Asen(314t-0,4\pi)$$

luego, para $t = 0$ la $i = 0$ y $L\frac{di}{dt}=50$, por lo tanto $\frac{di}{dt}=5$

aplicamos a la solución general la primera condición para $t = 0$ la $i = 0$

$$0=C_1+C_2+0,015Asen72^{\circ}09'53''=C_1+C_2+0,014$$

por otro lado:

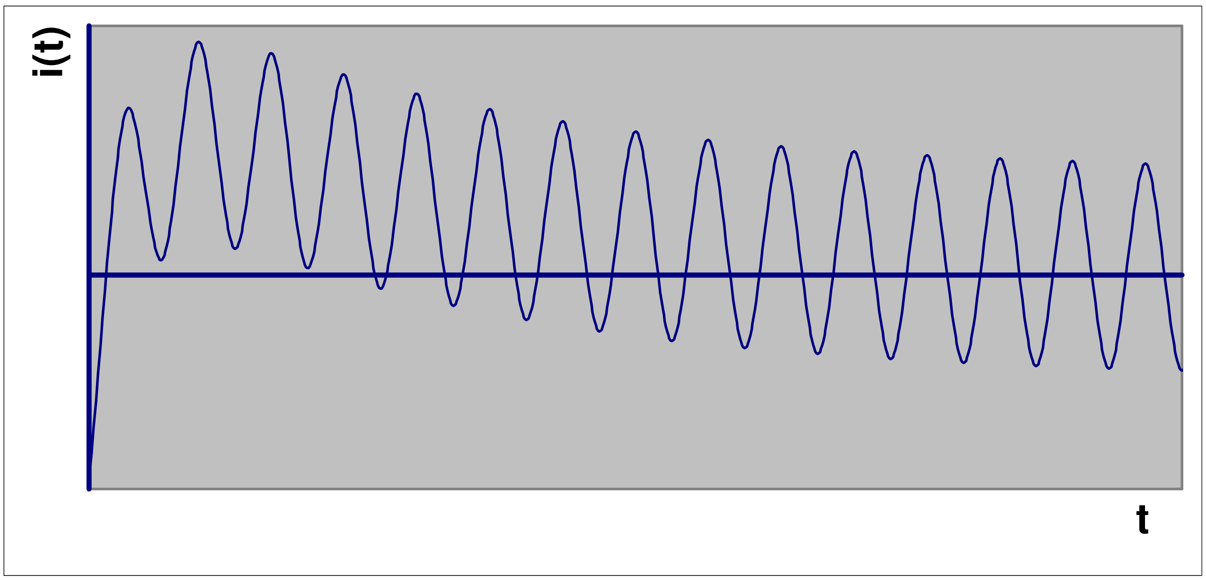
$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=-11,27.C_1.e^{-11,27.t}-88,73C_2e^{-88,73t}+0,015A314\cos(314t-0,4\pi)\Big|_{t=0}$$

$$5 = -11,27C_1 - 88,73C_2 + 0,015A314\cos 0,4\pi = -11,27C_1 - 88,73C_2 + 1,46$$

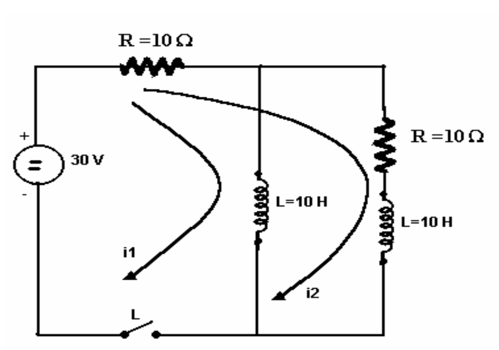
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -0,014 \\ -11,27C_1 - 88,73C_2 = 3,54 \end{cases}$$

resolviendo este sistema obtenemos: $C_1 = 0,03$ y $C_2 = -0,044$

$$i = 0,03e^{-11,27.t} - 0,044e^{-88,73.t} + 0,015Asen(314t - 0,4\pi)$$



6.- Regímenes transitorios en circuitos de dos mallas.



Ecuaciones diferenciales
Aplicaciones a transitorios de circuitos

Estudiaremos el siguiente circuito de dos mallas y en el instante en que para $t = 0$ se cierra la llave L y veremos que ocurre con las intensidades en cada una de las ramas del mismo.

Para $t = 0$ las corrientes i_1 e i_2 tienen valor cero ya que las inductancia actúan como una llave abierta; luego de pasado mucho tiempo, la inductancia de la rama central actuará como un cortocircuito y la intensidad $i_1 = 3$A mientras que la otra corriente será cero.

Pero veamos que ocurre en la transición, planteando las ecuaciones de malla:

$$\begin{cases} 10i_1 + 10\dfrac{di_1}{dt} + 10i_2 = 30 \\ \\ 10i_1 + 20i_2 + 10\dfrac{di_2}{dt} = 30 \end{cases}$$

Si a la expresión $\dfrac{d}{dt}$ la llamamos o representamos por Δ nuestro sistema quedará:

$$\begin{cases} (10 + 10\Delta)i_1 + 10i_2 = 30 \\ \\ 10i_1 + (20 + 10\Delta)i_2 = 30 \end{cases}$$

si a ambas ecuaciones las dividimos m.a.m por el valor de las inductancias, con el fin de dejar a Δ sin un factor que lo multiplique:

$$\begin{cases} (1 + \Delta)i_1 + i_2 = 3 \\ \\ i_1 + (2 + \Delta)i_2 = 3 \end{cases}$$

En este sistema de ecuaciones lo podemos representar:

$$\begin{vmatrix} 1+\Delta & 1 \\ 1 & 2+\Delta \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}$$

donde para calcular cada una de las corrientes aplicamos la Regla de Cramer:

$$\begin{vmatrix} 1+\Delta & 1 \\ 1 & 2+\Delta \end{vmatrix} . \, i_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2+\Delta \end{vmatrix} \quad \text{desarrollando:} \quad \left(\Delta^2 + 3\Delta + 1\right) i_1 = 6 + 3\Delta - 3$$

pero $3\Delta = \dfrac{d3}{dt} = 0$ por lo tanto y volviendo a la notación normal:

$$\Delta^2 i_1 + 3\Delta i_1 + i_1 = 3$$
$$i_1'' + 3i_1' + i_1 = 3$$

donde la solución de la homogénea nos da valores $r_1 = -0,38$ y $r_2 = -2,62$ por tanto:

$$i_h = C_1 e^{-0,38t} + C_2 e^{-2,62t}$$

y la solución particular, vista al principio de este punto es $i_p = 3$; luego la solución general será:

$$i_1 = C_1 e^{-0,38t} + C_2 e^{-2,62t} + 3$$

donde las constantes las determinamos a partir de las condicione iniciales:

para $t = 0$ la corriente $i_1 = 0$ y toda la tensión de la fuente cae en la inductancia:

$10\dfrac{di_1}{dt} = 30$, aplicando estas condiciones a la expresión anterior de la intensidad 1, determinamos las constantes y obtenemos:

$$i_1 = -2{,}17e^{-0{,}38t} - 0{,}83e^{-2{,}62t} + 3$$

$\begin{vmatrix} 1+\Delta & 1 \\ 1 & 2+\Delta \end{vmatrix} . \, i_2 = \begin{vmatrix} 1+\Delta & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ desarrollando: $\left(\Delta^2 + 3\Delta + 1\right) i_2 = 3 + 3\Delta - 3$

pero $3\Delta = \dfrac{d3}{dt} = 0$ por lo tanto y volviendo a la notación normal:

$$\Delta^2 i_2 + 3\Delta i_2 + i_2 = 0$$

$$i_2'' + 3i_2' + i_2 = 0$$

donde la solución de la homogénea será la misma que para la corriente anterior por tener la misma ecuación característica:

$$i_h = C_1 e^{-0{,}38t} + C_2 e^{-2{,}62t}$$

y la solución particular, vista al principio de este punto es $i_p = 0$; luego la solución general será:

$$i_2 = C_1 e^{-0{,}38t} + C_2 e^{-2{,}62t}$$

donde las constantes las determinamos a partir de las condicione iniciales:

para $t = 0$ la corriente $i_2 = 0$ y toda la tensión de la fuente cae en la inductancia:

$10\dfrac{di_2}{dt} = 30$, aplicando esta condiciones a la expresión anterior de la intensidad 2,

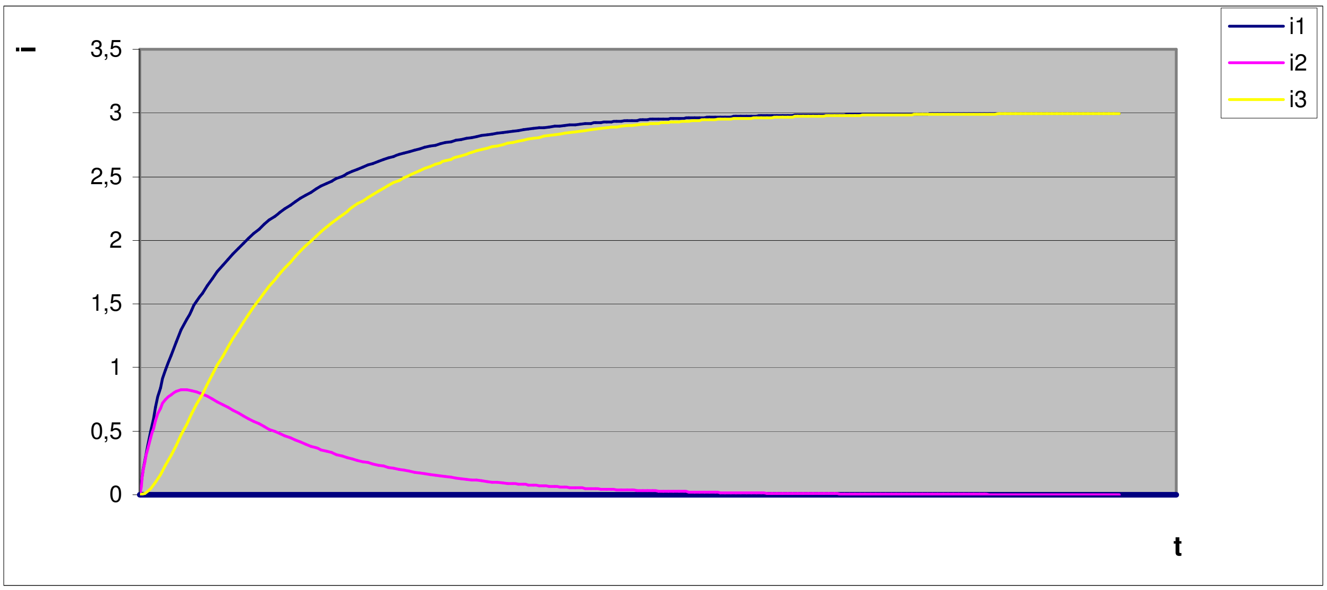
determinamos las constantes y obtenemos:

$$i_2 = 1{,}34e^{-0{,}38t} - 1{,}34e^{-2{,}62t}$$

y la intensidad en la inductancia central será:

$$i_3 = i_1 - i_2 = -2{,}17e^{-0{,}38t} - 0{,}83e^{-2{,}62t} + 3 - 1{,}34e^{-0{,}38t} + 1{,}34e^{-2{,}62t}$$

$$i_3 = i_1 - i_2 = -3{,}51e^{-0{,}38t} + 0{,}51e^{-2{,}62t} + 3$$



Que cosa los transitorios ..... ¿no? ....